



# RAUM·ZEIT·MATERIE

VORLESUNGEN ÜBER  
ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

VON

HERMANN WEYL



BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1918

520.1

W 5412

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen,  
vorbehalten.

Copyright 1918 by Julius Springer in Berlin.

Meiner Frau gewidmet

THE JOURNAL OF THE

## Vorwort.

Mit der Einsteinschen Relativitätstheorie hat das menschliche Denken über den Kosmos eine neue Stufe erklommen. Es ist, als wäre plötzlich eine Wand zusammengebrochen, die uns von der Wahrheit trennte: nun liegen Weiten und Tiefen vor unserm Erkenntnisblick entriegelt da, deren Möglichkeit wir vorher nicht einmal ahnten. Der Erfassung der Vernunft, welche dem physischen Weltgeschehen innewohnt, sind wir einen gewaltigen Schritt näher gekommen.

Wenngleich in jüngster Zeit eine ganze Reihe mehr oder minder populärer Einführungen in die allgemeine Relativitätstheorie erschienen ist, mangelte es doch bislang an einer systematischen Darstellung. Darum hielt ich es für angezeigt, die vorliegenden, von mir im Sommersemester 1917 an der Eidgen. Technischen Hochschule Zürich gehaltenen Vorlesungen herauszugeben. Zugleich wollte ich an diesem großen Thema ein Beispiel geben für die gegenseitige Durchdringung philosophischen, mathematischen und physikalischen Denkens, die mir sehr am Herzen liegt; dies konnte nur durch einen völlig in sich geschlossenen Aufbau von Grund auf gelingen, der sich durchaus auf das Prinzipielle beschränkt. Aber ich habe meinen eigenen Forderungen in dieser Hinsicht nicht voll Genüge tun können: der Mathematiker behielt auf Kosten des Philosophen das Übergewicht.

Die beim Leser vorausgesetzten Vorkenntnisse beschränken sich auf ein Minimum. Nicht nur die spezielle Relativitätstheorie ist ausführlich abgehandelt, sogar Maxwellsche Theorie und analytische Geometrie sind kurz, unter Herausarbeitung der wesentlichsten Züge, entwickelt. Das lag im Plane des Ganzen. Die Begründung des Tensorkalküls — durch den allein die in Frage stehenden physikalischen Erkenntnisse ihren naturgemäßen Ausdruck finden können — nimmt einen verhältnismäßig breiten Raum ein. So wird das Buch hoffentlich geeignet sein, den Physikern dieses mathematische Hilfsmittel vertrauter zu machen und zugleich als Lehrbuch unter der studierenden Jugend für die neuen Ideen zu wirken! In mathematischer Hinsicht glaube ich manches zur Vereinfachung und Vereinheitlichung beigetragen zu haben. Für die allgemeine Tensoranalysis konnte ich die Abhandlung von Herrn Levi-Civita in den *Rend. del Circ. Matem. di Palermo* Bd. 42 (1917) noch benutzen. Hessenbergs »Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie« [*Math. Ann.* Bd. 78 (1917)] erschien dagegen erst nach Vollendung des Manuskripts; nur den Beweis der Symmetrieeigenschaften der Riemannschen Krümmung habe ich noch nachträglich aus dieser Arbeit herübergenommen.

Die Einsteinsche Theorie in ihrem gegenwärtigen Zustande end mit einem Dualismus von Elektrizität und Gravitation, »Feld« und »Äther« diese bleiben völlig isoliert nebeneinander stehen. Gerade jetzt eröffnet sich dem Verfasser ein verheißungsvoller Weg, durch eine Erweiterung der geometrischen Grundlage beide Erscheinungsgebiete aus einer gemeinsamen Quelle herzuleiten. So ist die Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie offenbar noch nicht zum Abschluß gekommen. Es lag aber auch durchaus nicht in der Absicht dieses Buches, das auf dem Feld der physikalischen Erkenntnis heute so besonders kräftig sich rührende Leben dem Punkt, den es im Augenblicke erreicht hat, mit axiomatischer Gründlichkeit in eine tote Mumie zu verwandeln. —

Den Herren Bär und Hiltbrunner bin ich, dem einen für Korrekturhilfe, dem andern für Anfertigung der Figuren, zu Dank verpflichtet; dem Verlage für die unter den heutigen Umständen bewundernswerte rasche Drucklegung und gute Ausstattung der Buches.

Ribnitz in Mecklenburg, Ostern 1918.

Hermann Weyl.

# Inhaltsverzeichnis.

|                                                                                                      | Seite |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Einleitung . . . . .                                                                                 | I     |
| Kap. I. Der Euklidische Raum: seine mathematische Formalisierung<br>und seine Rolle in der Physik.   |       |
| § 1. Herleitung der elementaren Raumbegriffe aus dem der Gleichheit . . . . .                        | 10    |
| § 2. Grundlagen der affinen Geometrie . . . . .                                                      | 14    |
| § 3. Idee der n-dimensionalen Geometrie. Lineare Algebra. Quadratische Formen . . . . .              | 20    |
| § 4. Grundlagen der metrischen Geometrie. . . . .                                                    | 24    |
| § 5. Tensoren . . . . .                                                                              | 30    |
| § 6. Tensoralgebra. Beispiele . . . . .                                                              | 35    |
| § 7. Feinere Systematik der Tensoren. . . . .                                                        | 45    |
| § 8. Tensoranalysis. Spannungen. . . . .                                                             | 52    |
| § 9. Das stationäre elektromagnetische Feld . . . . .                                                | 58    |
| Kap. II. Riemannsche Geometrie.                                                                      |       |
| § 10. Bericht über Nicht-Euklidische Geometrie . . . . .                                             | 69    |
| § 11. Riemannsche Geometrie. . . . .                                                                 | 75    |
| § 12. Fortsetzung. Dynamische Auffassung der Metrik . . . . .                                        | 85    |
| § 13. Bildung von Tensoren 1. Stufe durch Differentiation . . . . .                                  | 91    |
| § 14. Geodäsie im Riemannschen Raum . . . . .                                                        | 97    |
| § 15. Allgemeine Tensoranalysis. . . . .                                                             | 103   |
| § 16. Raumkrümmung . . . . .                                                                         | 107   |
| § 17. Die geodätischen Linien als kürzeste . . . . .                                                 | 112   |
| Kap. III. Relativität von Raum und Zeit.                                                             |       |
| § 18. Das Galileische Relativitätsprinzip . . . . .                                                  | 114   |
| § 19. Elektrodynamik zeitlich veränderlicher Felder. Lorentzsches Relativitäts-<br>theorem . . . . . | 124   |
| § 20. Das Einsteinsche Relativitätsprinzip. . . . .                                                  | 132   |
| § 21. Relativistische Geometrie, Kinematik und Optik . . . . .                                       | 141   |
| § 22. Elektrodynamik bewegter Körper. . . . .                                                        | 149   |
| § 23. Mechanik des Relativitätsprinzips. . . . .                                                     | 156   |
| § 24. Die Materie . . . . .                                                                          | 159   |
| § 25. Die Miesche Theorie . . . . .                                                                  | 165   |
| Schlußbemerkungen . . . . .                                                                          | 172   |
| Kap. IV. Gravitation.                                                                                |       |
| § 26. Relativität der Bewegung, metrisches Feld und Gravitation . . . . .                            | 173   |
| § 27. Der Energie-Impuls-Tensor . . . . .                                                            | 184   |

|                                                                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 28. Einsteins Grundgesetz der Gravitation . . . . .                                                         | 188 |
| § 29. Statisches Gravitationsfeld. Zusammenhang mit der Erfahrung . . . . .                                   | 192 |
| § 30. Strenge Lösung des Einkörperproblems . . . . .                                                          | 199 |
| § 31. Weitere strenge Lösungen des statischen Gravitationsproblems . . . . .                                  | 205 |
| § 32. Hamiltonsches Prinzip der Maxwell-Lorentzschen Theorie unter Berücksichtigung der Gravitation . . . . . | 215 |
| § 33. Betrachtungen über die Welt als Ganzes . . . . .                                                        | 219 |
| Literatur . . . . .                                                                                           | 228 |
| Sachregister . . . . .                                                                                        | 231 |

Die Formeln sind in jedem Kapitel durchnummeriert. Formelverweise beziehen sich  
wenn nichts anderes bemerkt ist, jeweils auf das gleiche Kapitel.

## Einleitung.

Wir pflegen *Zeit und Raum* als die Existenzformen der realen Welt, die *Materie* als ihre *Substanz* aufzufassen. Ein bestimmtes Materiestück erfüllt in einem bestimmten Zeitmoment einen bestimmten Raumteil: in der daraus resultierenden Vorstellung der *Bewegung* gehen jene drei Grundbegriffe die innigste Verbindung ein. Von Descartes wurde es als Programm der exakten Naturwissenschaft aufgestellt, alles Geschehen von diesen Grundbegriffen aus zu konstruieren und damit auf Bewegung zurückzuführen. — Die tiefe Rätselhaftigkeit des *Zeitbewußtseins*, des zeitlichen Ablaufs der Welt, des Werdens ist vom menschlichen Geist, seit er zur Freiheit erwachte, immer empfunden worden; in ihr liegt eines jener letzten metaphysischen Probleme, um dessen Klärung und Lösung Philosophie durch die ganze Breite ihrer Geschichte unablässig gerungen hat. Der *Raum* ward durch die Griechen zum Gegenstand einer Wissenschaft von höchster Klarheit und Sicherheit. An ihm hat sich in der antiken Kultur die Idee der reinen Wissenschaft entfaltet, die Geometrie wurde zu einer der mächtigsten Kundgebungen des jene Kultur beseelenden Prinzips der Souveränität des Geistes. An die Geometrie hat sich, als die kirchlich-autoritative Weltanschauung des Mittelalters in die Brüche ging und die Wogen des Skeptizismus alles Feste hinwegzureißen drohten, der Wahrheitsglaube wie an einen Fels geklammert; und es konnte als das höchste Ideal aller Wissenschaft aufgestellt werden, »more geometrico« betrieben zu werden. Was endlich die *Materie* betrifft, so glaubten wir zu wissen, daß aller Veränderung eine Substanz, eben die Materie, zugrunde liegen müsse, daß jedes Stück der Materie als ein Quantum sich messen lasse und ihr Substanzcharakter seinen Ausdruck finde in dem Gesetz von der Erhaltung des in allen Veränderungen sich gleich bleibenden Materiequantums. Dieses unser bisheriges Wissen von Raum und Materie, durch die Philosophie vielfach als apriorische Erkenntnis von unbedingter Allgemeinheit und Notwendigkeit in Anspruch genommen, ist heute vollständig ins Wanken geraten. Nachdem die Physik unter den Händen Faradays und Maxwells der Materie als eine Realität anderer Kategorie das *Feld* gegenübergestellt hatte, nachdem auf der andern Seite die Mathematik durch ihre logische Minierarbeit im letztvergangenen Jahrhundert in aller Heimlichkeit das Vertrauen in die Evidenz der Euklidischen Geometrie untergraben hatte, kam in unsern Tagen der revolutionäre Sturm zum Ausbruch, der jene Vorstellungen über Raum, Zeit

und Materie, welche bis dahin als die festesten Stützen der Naturwissenschaft gegolten hatten, stürzte; doch nur, um Platz zu schaffen für eine freiere und tiefere Ansicht der Dinge. Diese Umwälzung wurde im wesentlichen vollzogen durch die Gedankenarbeit eines einzigen Mannes, Albert Einstein. Heute scheint die Entwicklung, was die Grundlagen betrifft, zu einem gewissen Abschluß gekommen zu sein; doch einerseits ob wir bereits vor einem neuen Definitivum stehen oder nicht — in jedem Fall muß man sich mit dem Neuen, das da emporgekommen ist, auseinandersetzen. Auch gibt es kein Zurück; die Entwicklung der wissenschaftlichen Gedankens mag über das jetzt Erreichte abermals hinausgehen, aber eine Rückkehr zu dem alten engen und starren Schema ist ausgeschlossen.

An den Problemen, die hier aufgeworfen werden, haben Philosophen, Mathematiker und Physiker ihren Anteil. Uns soll aber vor allem die mathematisch-physikalische Seite der Fragen beschäftigen; auf die philosophische werde ich nur ganz nebenher eingehen, aus dem einfachen Grunde, weil in dieser Richtung etwas irgendwie Endgültiges bisher nicht vorliegt und ich selber auch nicht imstande bin, auf die hergehörigen erkenntnistheoretischen Fragen solche Antworten zu geben, die ich meinem Erkenntnisgewissen voll verantworten könnte. Die Ideen, welche es hier darzustellen gilt, sind nicht aus einer spekulativen Versenkung in die Grundlagen physikalischer Erkenntnis hervorgegangen, sondern haben sich im Ausbau der lebendig vorwärts drängenden Wissenschaft der die alte Schale zu eng wurde, an konkreten physikalischen Problemen entwickelt; eine Revision der Prinzipien wurde jedesmal erst nachträglich vollzogen und nur so weit, als es gerade die neu aufgetauchten Ideen heischten. Wie die Dinge heute liegen, bleibt den Einzelwissenschaften nichts anderes übrig, als in diesem Sinne dogmatisch zu verfahren, doch in gutem Glauben den Weg zu gehen, auf den sie durch vernünftige im Rahmen ihrer eigentümlichen Methoden emporkommende Motive gedrängt werden. Die philosophische Klärung bleibt eine große Aufgabe von völlig anderer Art, als sie den Einzelwissenschaften zufällt; das ist nun der Philosoph zu; mit den Kettengewichten der in jener Aufgabe liegenden Schwierigkeiten behänge und behindere man aber nicht das Vorwärtsschreiten der konkreten Gegenstandsgebieten zugewandten Wissenschaften.

Gleichwohl beginne ich mit einigen *philosophischen* Erörterungen. Menschen in der natürlichen Einstellung, in der wir unser tägliches Leben führen, stehen uns in Akten der Wahrnehmung leibhaftig wirkliche Körperdinge gegenüber. Wir schreiben ihnen reale Existenz zu und wir nehmen sie hin als prinzipiell so beschaffen, so gestaltet, so gefärbt usw., wie sie uns da in der Wahrnehmung erscheinen (prinzipiell, d. h. vorbehaltlich aller als möglich zugegebenen Sinnestäuschungen, Spiegelungen, Träume, Halluzinationen usw.). Sie sind umgeben und durchsetzt von einer ins Unbestimmte verschwimmenden Mannigfaltigkeit analoger V

lichkeiten, die sich alle zusammenfügen zu einer einzigen, immerdar vorhandenen räumlichen Welt, zu der ich selber mit meinem Einzelleib gehöre. Es handle sich hier nur um diese körperlichen Dinge, nicht um all die Gegenständlichkeiten andrer Art, die wir als natürliche Menschen sonst noch uns gegenüber haben: Lebewesen, Personen, Gebrauchsgegenstände, Werte, solche Wesenheiten wie Staat, Recht, Sprache u. dgl. Wohl bei jedem theoretisch gerichteten Menschen beginnt die philosophische Selbstbesinnung damit, daß er irre wird an dieser Weltanschauung des naiven Realismus, auf die ich da eben kurz hingewiesen habe. Man sieht ein, daß eine solche Qualität wie etwa »grün« nur als Korrelat der Grün-Empfindung an dem in der Wahrnehmung sich gebenden Gegenstande Existenz besitzt, daß es aber sinnlos ist, sie als eine Beschaffenheit *an sich* daseienden Dingen *an sich* anzuhängen. Dieses *Erkenntnis von der Subjektivität der Sinnesqualitäten* tritt bei Galilei (wie bei Descartes und Hobbes) in engster Verbindung auf mit dem Grundsatz der *mathematisch-konstruktiven Methode unserer heutigen qualitätslosen Physik*, nach der z. B. die Farben »in Wirklichkeit« Ätherschwingungen, also Bewegungen sind. Erst Kant vollzog innerhalb der Philosophie mit völliger Klarheit den weiteren Schritt zu der Einsicht, daß nicht nur die sinnlichen Qualitäten, sondern auch der Raum und die räumlichen Merkmale keine objektive Bedeutung im absoluten Sinne besitzen, daß auch *der Raum nur eine Form unserer Anschauung* ist. Innerhalb der Physik ist es vielleicht erst durch die Relativitätstheorie ganz deutlich geworden, daß von dem uns in der Anschauung gegebenen Wesen von Raum und Zeit in die mathematisch konstruierte physikalische Welt nichts eingeht. Die Farben sind also »in Wirklichkeit« nicht einmal Ätherschwingungen, sondern mathematische Funktionsverläufe, wobei in den Funktionen, den drei Raum- und der einen Zeitdimension entsprechend, vier unabhängige Argumente auftreten.

In prinzipieller Allgemeinheit: die wirkliche Welt, jedes ihrer Bestandstücke und alle Bestimmungen an ihnen, sind und können nur gegeben sein als intentionale Objekte von Bewußtseinsakten. Das schlechthin Gegebene sind die Bewußtseinserlebnisse, die ich habe — so wie ich sie habe. Sie bestehen nun freilich keineswegs, wie die Positivisten vielfach behaupten, aus einem bloßen Stoff von Empfindungen, sondern in einer Wahrnehmung z. B. steht in der Tat leibhaft für mich da ein Gegenstand, auf welchen jenes Erlebnis in einer jedermann bekannten, aber nicht näher beschreibbaren, völlig eigentümlichen Weise bezogen ist, die mit Brentano durch den Ausdruck »*intentionales Objekt*« bezeichnet sein soll. Indem ich wahrnehme, sehe ich etwa diesen Stuhl, ich bin durchaus auf ihn gerichtet. Ich »*habe*« die Wahrnehmung, aber erst wenn ich diese Wahrnehmung selber wieder, wozu ich in einem freien Akt der Reflexion imstande bin, zum intentionalen Objekt einer neuen, inneren Wahrnehmung mache, »*weiß*« ich von ihr (und nicht bloß von dem Stuhl) etwas und stelle dies fest, was ich da eben gesagt

habe. In diesem zweiten Akt ist das intentionale Objekt ein *immanentes*, nämlich wie der Akt selber ein reelles Bestandteil meines Erlebnisses; in dem primären Wahrnehmungsakt aber ist das Objekt *transzendent*, d. h. zwar gegeben in einem Bewußtseinserlebnis, aber nicht als reelles Bestandteil. Das Immanente ist *absolut*, d. h. es ist genau das, als was ich es da habe, und dieses sein Wesen kann ich mir eventuell in Akten der Reflexion zur Gegebenheit bringen. Hingegen haben die transzendenten Gegenstände nur ein *phänomenales* Sein, sie sind Erscheinendes — in mannigfaltigen Erscheinungsweisen und »Abschattungen«. Ein und dasselbe Blatt sieht so oder so groß aus, erscheint so oder so gefärbt, je nach meiner Stellung und der Beleuchtung; keine dieser Erscheinungsweisen kann für sich das Recht beanspruchen, das Blatt so zu geben, wie es »an sich« ist. — In jeder Wahrnehmung liegt nun *unzweifelhaft* die *Thesis der Wirklichkeit* des in ihr erscheinenden Objekts, und zwar als Teil und inhaltliche Fortbestimmung der Genese der *thesis* einer wirklichen Welt. Aber indem wir von der natürlichen philosophischen Einstellung übergehen, machen wir, über die Wahrnehmung reflektierend, diese *Thesis* sozusagen nicht mehr mit; wir konstatieren kühl, daß in ihr etwas als wirklich »vermeint« ist. Der Sinn und das Recht dieser Setzung wird uns jetzt gerade zum Problem, das von dem Bewußtseins-Gegebenen aus seine Lösung finden muß. Ich meine also keineswegs, daß die Auffassung des Weltgeschehens als eines vom Ich produzierten Bewußtseins-Spiels gegenüber dem *naïven Realismus* die höhere Wahrheit enthalte; im Gegenteil. Nur darum handelt es sich, daß man einsehe, das Bewußtseins-Gegebene ist der Ausgangspunkt, in den wir uns stellen müssen, um Sinn und Recht der Wirklichkeitssetzung auf eine absolute Weise zu begreifen. Analog steht es auf logischem Gebiet. Ein Urteil, das ich fälle, behauptet einen Sachverhalt; es setzt diesen Sachverhalt als wahr. Auch hier entsteht die philosophische Frage nach dem Sinn und Recht dieser Wahrnehmungsthesis; auch hier leugne ich nicht die Idee der objektiven Wahrheit, aber sie wird zum Problem, das ich von dem absolut Gegebenen aus begreifen habe. — Das »reine Bewußtsein« ist der Sitz des philosophischen *a priori*. Hingegen muß und wird die philosophische Klärung der Wirklichkeitsthesis ergeben, daß keiner jener erfahrenden Akte der Wahrnehmung, Erinnerung usw., in denen ich Wirklichkeit erfasse, letztes Recht dazu gibt, dem wahrgenommenen Gegenstande Existenz und die wahrgenommene Beschaffenheit zuzuschreiben; dieses Recht ist von einem auf andere Wahrnehmungen usw. sich stützenden immer wieder überwogen werden. Es liegt im Wesen eines wirklichen Dinges, Unerschöpfliches zu sein an Inhalt, dem wir uns nur durch immer neuen zum Teil sich widersprechende Erfahrungen und deren Abgleich annähernd begrenzt nähern können. In diesem Sinne ist das wirkliche Ding eine Grenzidee. Darauf beruht der empirische Charakter aller Wirklichkeitskenntnis<sup>1)</sup>.

Die Urform des Bewußtseinstromes ist die *Zeit*. Es ist eine Tatsache, sie mag so dunkel und rätselhaft für die Vernunft sein wie sie will, aber sie läßt sich nicht wegleugnen und wir müssen sie hinnehmen, daß die Bewußtseinsinhalte sich nicht geben als seiend schlechthin (wie etwa Begriffe, Zahlen u. dgl.), sondern als *jetzt-seiend*, die Form des dauernden Jetzt erfüllend mit einem wechselnden Gehalt; so daß es nicht heißt: dies *ist*, sondern: dies *ist jetzt*, doch *jetzt* nicht mehr. Reißen wir uns in der Reflexion heraus aus diesem Strom und stellen uns seinen Gehalt als ein Objekt gegenüber, so wird er uns zu einem *zeitlichen Ablauf*, dessen einzelne Stadien in der Beziehung des *früher und später* zueinander stehen.

Wie die Zeit die Form des Bewußtseinstromes, so, darf man mit Fug und Recht behaupten, ist der *Raum* die Form der körperlichen Wirklichkeit. Alle Momente körperlicher Dinge, wie sie in den Akten äußerer Wahrnehmung gegeben sind, Farbe z. B., haben das Auseinander der räumlichen Ausbreitung an sich. Aber erst indem sich aus allen unseren Erfahrungen eine einzige zusammenhängende reale Welt aufbaut, wird die in jeder Wahrnehmung gegebene räumliche Ausbreitung zu einem Teil des einen und selben Raumes, der alle Dinge umspannt. Dieser Raum ist *Form* der Außenwelt; das will sagen: jedes körperliche Ding kann, ohne irgendwie inhaltlich ein anderes zu sein als es ist, ebenso gut an jeder anderen Raumstelle sein als gerade an dieser. Damit ist zugleich die *Homogenität* des Raumes gegeben, und hier liegt die eigentliche Wurzel des *Kongruenzbegriffs*.

Wäre es nun so, daß die Welt des Bewußtseins und der transzendenten Wirklichkeit völlig voneinander geschieden sind oder vielmehr nur das stille Hinschauen der Wahrnehmung die Brücke zwischen ihnen spannt, so bliebe es wohl dabei, wie ich es eben dargestellt habe: auf der einen Seite das in der Form des dauernden Jetzt sich wandelnde, aber raumlose Bewußtsein, auf der andern die räumlich ausgebreitete, aber zeitlose Wirklichkeit, von der jenes nur ein wechselndes Phänomen enthält. Ursprünglicher aber als alle Wahrnehmung ist in uns das Erleben von Streben und Widerstand, des Tuns und Leidens\*). Für einen in natürlicher Aktivität lebenden Menschen dient die Wahrnehmung vor allem dazu, ihm den bestimmten Angriffspunkt seiner gewollten Tat und den Sitz ihrer Widerstände in bildhafter Klarheit vor das Bewußtsein zu rücken. Im Erleben des Tuns und Erleidens werde ich selbst mir zu einem einzelnen Individuum von psychischer Realität, geknüpft an einen Leib, der unter den körperlichen Dingen der Außenwelt seine Stelle im Raum hat und durch den hindurch ich mit andern Individuen meinesgleichen in Verbindung stehe; wird das Bewußtsein, ohne doch seine Immanenz preiszugeben, zu einem Stück der Wirklichkeit, zu diesem be-

\*) Unsere Grammatik hat nur die Verbformen des activum und passivum; es gibt keine zum Ausdruck eines Geschehens, geschweige denn eines Sachverhalts.

sonderen Menschen, der ich bin, der geboren ward und sterben wird. Andererseits spannt aber dadurch auch das Bewußtsein seine Form, die Zeit, über die Wirklichkeit aus: in ihr selber ist darum Veränderung, Bewegung, Ablauf, Werden und Vergehen; und wie mein Wille durch meinen Leib hindurch als bewegende Tat in die reale Welt wirkend hineinübergreift, so ist sie selber auch *wirkende* (wie ihr deutscher Name »Wirklichkeit« besagt), ihre Erscheinungen stehen in einem durchgängigen *Kausalzusammenhang* untereinander. In der Tat zeigt sich in der Physik, daß kosmische Zeit und Kausalität nicht voneinander zu trennen sind. Die neue Weise, in der die Relativitätstheorie das Problem der Verkopplung von Raum und Zeit in der Wirklichkeit löst, fällt zusammen mit einer neuen Einsicht in den Wirkungszusammenhang der Welt.

Der Gang unserer Betrachtungen ist damit klar vorgezeichnet. Was über die *Zeit für sich* zu sagen ist und über ihre mathematisch-begriffliche Erfassung, möge noch in dieser Einleitung Platz finden. Weit ausführlicher müssen wir dann vom Raume handeln. Das I. Kapitel ist dem *Euklidischen Raume* gewidmet und seiner mathematischen Konstruktion. Im II. Kapitel werden die Ideen entwickelt, welche über das Euklidische Schema hinausdrängen und im allgemeinen *Riemannschen Raumbegriff* ihren Abschluß finden. Darauf wird in einem III. Kapitel das eben erwähnte Problem der *Verkopplung von Raum und Zeit in der Welt* zu erörtern sein; von hier ab spielen die Erkenntnisse der Mechanik und Physik eine wichtige Rolle, weil dieses Problem seinem Wesen nach, wie bereits betont, an die Auffassung der Welt als einer wirkenden geknüpft ist. Die Synthese der im II. und III. Kapitel enthaltenen Gedanken wird uns dann in dem abschließenden Kapitel IV zu Einsteins *allgemeiner Relativitätstheorie* führen, in der in physikalischer Hinsicht eine neue Theorie der *Gravitation* enthalten ist. Von den Umwälzungen, die unsere Vorstellungen von Raum und Zeit darin erfahren, wird der *Begriff der Materie* sozusagen zwangsläufig miterfaßt werden; so daß, was darüber zu sagen ist, an der gehörigen Stelle im III. und IV. Kapitel zur Sprache kommen soll. —

Um an die *Zeit* mathematische Begriffe heranbringen zu können, müssen wir die ideelle Möglichkeit, in der Zeit ein streng punktuell *Jetzt* zu setzen, die Aufweisbarkeit von Zeitpunkten zugeben. Von je zwei verschiedenen Zeitpunkten wird dann immer der eine der *frühere*, der andere der *spätere* sein. Von dieser »Ordnungsbeziehung« gilt der Grundsatz: Ist *A* früher als *B* und *B* früher als *C*, so ist *A* früher als *C*. Je zwei Zeitpunkte *AB*, von denen *A* der frühere ist, begrenzen eine *Zeitstrecke* in sie hinein fällt jeder Punkt, der später als *A*, früher als *B* ist. Da die Zeit Form des Erlebnisstromes ist, kommt in der Idee der *Gleichheit* zum Ausdruck: der Erlebnisgehalt, welcher die Zeitstrecke *AB* erfüllt kann an sich, ohne irgendwie ein anderer zu sein als er ist, in irgendeiner anderen Zeit fallen; die Zeitstrecke, die er dort erfüllen würde, ist die Strecke *AB* gleich. In der Physik ergibt sich daraus für die Gleichheit

von Zeitstrecken der objektiven Zeit, unter Hinzuziehung des Kausalitätsprinzips, das folgende objektive Kriterium. Kehrt ein vollständig isoliertes (keine Einwirkung von außen erfahrendes) physikalisches System einmal genau zu demselben Zustand zurück, in dem es sich bereits in einem früheren Moment befand, so wiederholt sich von da ab die gleiche zeitliche Zustandsfolge, und der Vorgang ist ein zyklischer. Ein solches System nennen wir allgemein eine *Uhr*. Jede Periode hat die *gleiche* Zeitdauer.

Auf diese beiden Relationen, früher-später und gleich, stützt sich die mathematische Erfassung der Zeit durch das *Messen*. Wir versuchen, das Wesen des Messens kurz anzudeuten<sup>2)</sup>. Die Zeit ist homogen, d. h. ein einzelner Zeitpunkt kann nur durch individuelle Aufweisung gegeben werden, es gibt keine im allgemeinen Wesen der Zeit gründende Eigenschaft, welche einem Zeitpunkt zukäme, einem andern aber nicht. In rein logischer Fassung: jede auf Grund der erwähnten beiden Urrelationen rein logisch zu definierende Eigenschaft kommt entweder allen Zeitpunkten oder keinem zu. Ebenso steht es noch mit den Zeitstrecken oder Punktepaaren: es gibt keine auf Grund jener beiden Urrelationen zu definierende Beziehung zwischen zwei Punkten, die nicht für jedes Punktepaar  $AB$  ( $A$  früher als  $B$ ) erfüllt wäre, wenn sie für ein solches besteht. Anders wird die Sache aber, wenn wir zu drei Zeitpunkten übergehen. Sind irgend zwei Zeitpunkte  $OE$ , von denen  $O$  der frühere ist, gegeben, so ist es möglich, jeden Zeitpunkt  $P$  relativ zu der Einheitsstrecke  $OE$  auf begriffliche Weise festzulegen; d. h. es ist möglich, rein logisch aus den Urrelationen eine Beziehung  $t$  zwischen drei Punkten zu definieren, für welche folgendes gilt: 1) zu je zwei Punkten  $A$  und  $B$ , von denen  $A$  der frühere ist, gibt es einen und nur einen Punkt  $C$ , so daß zwischen  $A$ ,  $B$  und  $C$  die Beziehung  $t$  statthat, in Zeichen:

$$AC = t \cdot AB;$$

2) es ist

$$(*) \quad OP = t \cdot OE.$$

Und übrigens kann es bei gegebenen Punkten  $OEP$  auch nur eine solche Relation geben. Denn wäre  $t^*$  eine zweite, so käme die durch

$$t \cdot AB = t^* \cdot AB$$

erklärte Eigenschaft der Zeitstrecke  $AB = OE$  und folglich wegen der Homogenität *jeder* Zeitstrecke zu; also drücken dann die Gleichungen

$$AC = t \cdot AB \quad \text{und} \quad AC = t^* \cdot AB$$

beide dieselbe Relation aus. Die *Zahl* ist nichts anderes als ein zusammengedrangtes Symbol für eine derartige Relation  $t$  und ihre logische Definition auf Grund der Urbeziehungen. Bei gegebener Einheitsstrecke  $OE$  wird durch  $(*)$  eine *umkehrbar-eindeutige Korrespondenz zwischen den Zeitpunkten  $P$  und den Zahlen  $t$*  hergestellt; wir sprechen von  $P$  geradezu als dem »Zeitpunkt  $t$ «; genauer heißt  $t$  die *Abszisse* von  $P$ . Die Logik wird hier zur Arithmetik.

Durch diese prinzipielle Formulierung des Messens, meine ich, wird es begreiflich, wie die Mathematik zu ihrer Rolle in den exakten Naturwissenschaften kommt. Für das Messen wesentlich ist der Unterschied zwischen dem »Geben« eines Gegenstandes durch individuelle Aufweisung einerseits, auf begrifflichem Wege anderseits. Das letzte ist immer nur relativ zu Gegenständen möglich, die unmittelbar aufgewiesen werden müssen. Deshalb ist mit dem Messen immer eine *Relativitätstheorie* verknüpft. Ihr Problem stellt sich allgemein für ein beliebiges Gegenstandsgebiet so: 1) Was muß aufgewiesen werden, um relativ dazu auf begrifflichem Wege jeden Gegenstand  $P$  des in Frage stehenden Gebietes geben zu können? Das Aufzuweisende heißt das *Koordinatensystem*, die begriffliche Definition die *Koordinate* (oder Abszisse) von  $P$  in jenem Koordinatensystem. Zwei verschiedene Koordinatensysteme sind objektiv völlig gleichwertig, es gibt keine begrifflich zu erfassende Eigenschaft, welcher dem einen zukäme, dem andern nicht; denn dann wäre zu viel unmittelbar aufgewiesen. 2) Welcher gesetzmäßige Zusammenhang findet zwischen den Koordinaten eines und desselben willkürlichen Gegenstandes  $P$  in zwei verschiedenen Koordinatensystemen statt?

Hier im Gebiet der Zeitpunkte beantwortet sich die erste Frage dahin, daß das Koordinatensystem besteht aus einer Zeitstrecke  $OE$  (Anfangspunkt und Maßeinheit); die zweite aber durch die Transformationsformel

$$t = at' + b \quad (a > 0),$$

in welcher  $a, b$  Konstante sind und  $t, t'$  die Koordinaten desselben willkürlichen Punktes  $P$  in einem ersten, »ungestrichenen«, und einem zweiten »gestrichenen« Koordinatensystem. Dabei können als charakteristische Zahlen  $a, b$  der Transformation für alle möglichen Paare von Koordinatensystemen alle möglichen reellen Zahlen auftreten, mit der Beschränkung, daß  $a$  stets positiv ist. Die Gesamtheit dieser Transformationen bildet, wie das im Wesen der Sache liegt, eine *Gruppe*; d. h.

1) die »Identität«  $t = t'$  ist in ihr enthalten;

2) mit jeder Transformation tritt ihre Inverse in der Gruppe auf, d. h. diejenige, welche die erstere gerade wieder rückgängig macht. Die Inverse der Transformation  $(a, b)$ :

$$t = at' + b$$

ist  $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$ :

$$t' = \frac{1}{a}t - \frac{b}{a};$$

3) mit zwei Transformationen ist in der Gruppe auch immer diejenige enthalten, welche durch Hintereinanderausführung jener beiden Transformationen hervorgeht. In der Tat: durch Hintereinanderausführung beider Transformationen

$$t = at' + b, \quad t' = a't'' + b'$$

entsteht

$$t = a^* t'' + b^*,$$

wo

$$a^* = a \cdot a', \quad b^* = (a b') + b$$

ist; und wenn  $a$  und  $a'$  positiv sind, ist auch ihr Produkt positiv.

Die in Kap. III und IV behandelte Relativitätstheorie wirft das Relativitätsproblem auf nicht bloß für die Zeitpunkte, sondern für die gesamte physische Welt. Es stellt sich aber heraus, daß es gelöst ist, sobald es einmal für die Formen dieser Welt, Raum und Zeit, seine Lösung gefunden hat: auf Grund eines Koordinatensystems für Raum und Zeit läßt sich auch das physikalisch Reale in der Welt nach allen seinen Bestimmungen begrifflich, durch Zahlen, festlegen. —

Alle Anfänge sind dunkel. Gerade dem Mathematiker, der in seiner ausgebildeten Wissenschaft in strenger und formaler Weise mit seinen Begriffen operiert, tut es not, von Zeit zu Zeit daran erinnert zu werden, daß die Ursprünge in dunklere Tiefen zurückweisen, als er mit seinen Methoden zu erfassen vermag. Jenseits alles Einzelwissens bleibt die Aufgabe, zu *begreifen*. Trotz des entmutigenden Hin- und Herschwankens der Philosophie von System zu System können wir nicht darauf verzichten, wenn sich nicht Erkenntnis in ein sinnloses Chaos verwandeln soll.

## Kapitel I.

### Der Euklidische Raum: seine mathematische Formalisierung und seine Rolle in der Physik.

#### § 1. Herleitung der elementaren Raumbegriffe aus dem der Gleichheit.

Wie wir in der Zeit ein streng punktuell *Jetzt* gesetzt haben, so setzen wir in der kontinuierlichen räumlichen Ausbreitung, die ebenfalls unendlicher Teilung fähig ist, als letztes einfaches Element ein **exakter Hier**, den Raumpunkt. Der Raum ist nicht wie die Zeit ein eindimensionales Kontinuum, die Art seines kontinuierlichen Ausgebreitetseins läßt sich nicht auf das einfache Verhältnis von früher und später zurückführen; wir lassen dahingestellt, in was für Relationen diese Kontinuität begrifflich zu erfassen ist. Hingegen ist der Raum wie die Zeit *Form* der Erscheinungen, und damit ist die Idee der Gleichheit gegeben: identischer Gehalt, genau dasselbe Ding, welches bleibt, was es ist, kann gut an irgend einer andern Raumstelle sein als an der, an welcher sich wirklich befindet; das von ihm dann eingenommene Raumstück ist demjenigen  $\mathcal{S}$  gleich oder *kongruent*, welches es wirklich einnimmt. Jedem Punkt  $P$  von  $\mathcal{S}$  entspricht ein bestimmter *homologer* Punkt  $P'$  in  $\mathcal{C}$ , der nach jener Ortsversetzung von demselben Teile des gegebenen Gebiets bedeckt sein würde, der in Wirklichkeit  $P$  bedeckt. Diese »Abbildung« vermöge deren dem Punkte  $P$  der Punkt  $P'$  entspricht, nenne ich eine kongruente Abbildung. Bei Erfüllung geeigneter subjektiver Bedingungen würde uns jenes Materiale nach seiner Ortsversetzung genau so erscheinen wie das tatsächlich gegebene. Es ist der Glaube vernünftig zu rekonstruieren, daß ein als starr erprobter Körper — d. i. ein solcher, der, wir ihn auch bewegen und bearbeiten mögen, uns immer wieder genau erscheint wie er vorher war, wenn wir uns selber zu ihm in die richtige Situation bringen — in zwei Lagen, die wir ihm erteilen, diese kongruenten Raumstücke realisiert. Den Begriff der Gleichheit will ich nun dem schwer zu analysierenden des kontinuierlichen Zusammenhangs als Aufbau der Geometrie zugrunde legen und in einer flüchtig hingeworfenen Skizze zeigen, wie auf diese alle geometrischen Grundbegriffe zurückgeführt werden können. Dabei schwebt mir als eigentliches Ziel vor, unter kongruenten Abbildungen die *Translationen* herauszuheben; erst von dem Begriff aus soll dann eine strenger geführte axiomatische Begründung der Euklidischen Geometrie anheben.

Zunächst die *gerade Linie*! Ihre Eigentümlichkeit ist, daß sie durch zwei ihrer Punkte bestimmt ist; jede andere Linie kann noch unter Festhaltung zweier ihrer Punkte durch kongruente Abbildung in eine andere Lage gebracht werden (Linealprobe). Also: sind  $A, B$  zwei verschiedene Punkte, so gehört zu der geraden Linie  $g = AB$  jeder Punkt, der bei allen kongruenten Abbildungen in sich übergeht, die  $A$  und  $B$  in sich überführen (die gerade Linie »weicht nach keiner Seite aus«). Kinematisch ausgedrückt, kommt das darauf hinaus, daß wir die gerade Linie als Rotationsachse auffassen. Sie ist homogen und ein Linearkontinuum wie die Zeit: sie zerfällt durch einen beliebigen ihrer Punkte  $A$  in zwei Teile, zwei »Halbgeraden«. Gehören  $B$  und  $C$  je einem dieser beiden Teile an, so sagt man,  $A$  liege zwischen  $B$  und  $C$ ; die Punkte des einen Teils liegen rechts, die des andern links von  $A$  (dabei wird willkürlich bestimmt, welche Hälfte die linke und welche die rechte heißen soll). Die einfachsten Grundtatsachen, welche für diesen Begriff des »zwischen« gelten, lassen sich in solcher Vollständigkeit, wie es für den deduktiven Aufbau der Geometrie nötig ist, exakt formulieren. Daher sucht man in der Geometrie (unter Verkehrung des wahren anschaulichen Verhältnisses) auf den Begriff des »zwischen«, auf die Relation » $A$  gehört der Geraden  $BC$  an und liegt zwischen  $B$  und  $C$ «, alle Kontinuitätsbegriffe zurückzuführen. Sei  $A'$  ein Punkt rechts von  $A$ . Durch  $A'$  zerfällt die Gerade  $g$  gleichfalls in zwei Stücke; wir nennen dasjenige, dem  $A$  angehört, das linke. Liegt hingegen  $A'$  links von  $A$ , so dreht sich die Sache um. Bei dieser Festsetzung gelten dann analoge Verhältnisse nicht nur hinsichtlich  $A$  und  $A'$ , sondern irgend zweier Punkte der geraden Linie. Durch das links und rechts sind die Punkte der Geraden genau in der gleichen Weise geordnet wie die Zeitpunkte durch das früher und später.

Links und rechts sind gleichberechtigt. Es gibt eine kongruente Abbildung, die  $A$  fest läßt, jedoch die beiden Hälften, in welche die Gerade durch  $A$  zerfällt, vertauscht; jede Strecke  $AB$  läßt sich verkehrt mit sich zur Deckung bringen (so daß  $B$  auf  $A$  und  $A$  auf  $B$  fällt). Hingegen läßt eine kongruente Abbildung, die  $A$  in  $A$  überführt und alle Punkte rechts von  $A$  in Punkte rechts von  $A$ , alle Punkte links von  $A$  in Punkte links von  $A$ , jeden Punkt der Geraden fest. Die Homogenität der geraden Linie kommt darin zum Ausdruck, daß man die Gerade so mit sich zur Deckung bringen kann, daß irgend einer ihrer Punkte  $A$  in irgend einen andern  $A'$  übergeht, die rechte Hälfte von  $A$  aus in die rechte Hälfte von  $A'$  aus und ebenso die linke in die linke (Translation der Geraden). Führen wir für die Punkte der Geraden die Gleichheit  $AB = A'B'$  durch die Erklärung ein: sie besagt, daß  $AB$  durch eine Translation der Geraden in  $A'B'$  übergeht, so finden hinsichtlich dieses Begriffs die gleichen Umstände statt, wie sie für die Zeit galten. Sie ermöglichen die Einführung der Zahl, die Herstellung einer umkehrbar-eindeutigen Korrespondenz zwischen den Punkten auf der geraden Linie und den reellen Zahlen unter Zugrundelegung einer Einheitsstrecke  $OE$ .

Betrachten wir die Gruppe der kongruenten Abbildungen, welche Gerade  $g$  fest lassen (d. h. jeden Punkt von  $g$  in einen Punkt von  $g$  überführen)! Unter ihnen haben wir die Rotationen als diejenigen hervorgehoben, welche nicht nur  $g$  als Ganzes, sondern jeden Punkt von  $g$  einzeln an seiner Stelle lassen. Wie können wir in dieser Gruppe Translationen von den Schraubungen unterscheiden? Ich will hier den ersten Weg einschlagen, der auf einer rotativen Auffassung nicht der Geraden, sondern auch der Ebene beruht.

Zwei von einem Punkt  $O$  ausgehende Halbgerade bilden einen Winkel. Jeder Winkel kann verkehrt mit sich zur Deckung gebracht werden, indem man den einen Schenkel auf den andern fällt und umgekehrt. Ein reiner Winkel ist mit seinem Nebenwinkel kongruent. Ist also  $h$  eine Gerade, die in  $A$  auf  $g$  senkrecht steht, so gibt es eine Rotation um  $g$  (Umdrehung), welche die beiden Hälften, in die  $h$  durch  $A$  zerfällt, vertauscht. Alle auf  $g$  in  $A$  senkrecht stehenden Geraden bilden die Ebene  $E$  durch  $A$  senkrecht zu  $g$ . Je zwei dieser senkrechten Geraden gehen ineinander durch Rotation um  $g$  hervor. Bringt man  $g$  irgendwie

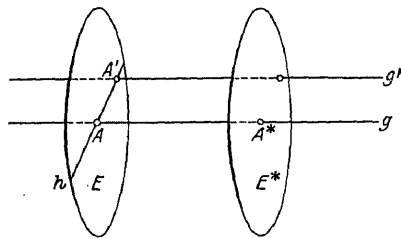


Fig. 1.

daß ich den einen mit vertikaler Achse verkehrt auf den andern stelle, so kann ich die beiden Tischplatten zur Deckung bringe. Die Ebene ist homogen. Der Punkt  $A$  auf  $E$ , der hier zunächst als »Zentrum« erscheint, ist in keiner Weise vor ihren übrigen Punkten ausgezeichnet; durch jeden Punkt  $A'$  von  $E$  geht eine Gerade  $g'$  hindurch von der Art, daß  $E$  aus allen Geraden durch  $A'$  senkrecht zu  $g'$  besteht. Die aus den sämtlichen Punkten  $A'$  von  $E$  in dieser Weise hervorgehenden senkrechten Geraden bilden eine Schar paralleler Geraden; in ihr ist die Gerade  $g$ , von der wir ausgingen, in keiner Weise ausgezeichnet. Die Geraden der Schar erfüllen den ganzen Raum, so daß durch jeden Raumpunkt eine und nur eine Gerade der Schar hindurchgeht. Sie ist unabhängig davon, an welcher Stelle  $A$  der Geraden  $g$  die obige Konstruktion ausgeführt ist. Ist  $A^*$  irgend ein Punkt von  $g$ , so schneidet die auf  $g$  in  $A^*$  errichtete Normalebene nicht nur  $g$ , sondern alle Geraden der Parallelschar senkrecht. Diese aus den sämtlichen Punkten  $A^*$  von  $g$  entstehenden Normalebenen  $E^*$  bilden eine parallele Schar von Ebenen; auch sie erfüllen den Raum einfach und lückenlos. Es bedarf nur noch eines k

Schrittes, um von dem so gewonnenen Raumgertist zum rechtwinkligen Koordinatensystem zu gelangen. Hier benutzen wir es jedoch, um den Begriff der räumlichen Translation festzulegen: die Translation ist eine kongruente Abbildung, die nicht nur  $g$ , sondern jede Gerade der Parallelen-schar in sich überführt. Es gibt eine und nur eine Translation, welche den beliebigen Punkt  $A$  von  $g$  in den beliebigen Punkt  $A^*$  derselben Geraden überführt.

Ich will noch einen zweiten Weg angeben, um zum Begriff der Translation zu gelangen. Das Hauptkennzeichen der Translation ist, daß in ihr alle Punkte gleichberechtigt sind, daß von dem Verhalten eines Punktes bei der Translation nichts Objektives ausgesagt werden kann, was nicht auch für jeden andern gelte (so daß auch bei gegebener Translation die Punkte des Raumes nur durch individuelles Aufweisen [»dieser da«] voneinander unterschieden werden können, während z. B. in einer Rotation sich die Punkte der Achse durch die Eigenschaft, daß sie an ihrer Stelle bleiben, vor allen übrigen auszeichnen). Indem wir dieses Kennzeichen in den Vordergrund stellen, ergibt sich die folgende Erklärung der Translation, die von dem Begriff der Rotation ganz unabhängig ist. Bei einer kongruenten Abbildung gehe der beliebige Punkt  $P$  in  $P'$  über; wir wollen  $PP'$  ein Paar zusammengehöriger Punkte nennen. Hat eine zweite kongruente Abbildung die Eigenschaft, daß sie jedes Paar zusammengehöriger Punkte wiederum in ein solches Paar überführt, so soll sie mit der ersten vertauschbar genannt werden. Eine kongruente Abbildung heißt eine Translation, wenn es mit ihr vertauschbare kongruente Abbildungen gibt, welche den beliebigen Punkt  $A$  in den beliebigen Punkt  $B$  überführen. — Daß zwei kongruente Abbildungen  $I, II$  miteinander vertauschbar sind, besagt, wie man sofort auf Grund der Erklärung beweist, daß die durch Hintereinanderausführung der Abbildungen  $I, II$  entstehende kongruente Abbildung mit derjenigen identisch ist, die durch Hintereinanderausführung dieser beiden Abbildungen  $II, I$  in umgekehrter Reihenfolge hervorgeht. Es gibt keine Translation, die den Punkt  $A$  in  $A$  überführt, außer der Identität, die jeden Punkt festläßt. Denn wenn eine solche Translation  $P$  in  $P'$  überführt, so muß es nach Definition eine kongruente Abbildung geben, die  $A$  in  $P$  und gleichzeitig  $A$  in  $P'$  verwandelt; mithin muß  $P'$  mit  $P$  identisch sein. Es ist eine Tatsache, daß eine Translation (und zwar nach dem Gesagten nur eine) existiert, welche den beliebigen Punkt  $A$  in den beliebigen  $B$  überführt. Es ist eine Tatsache, daß, wenn  $\mathfrak{T}$  eine Translation ist,  $A$  und  $B$  irgend zwei Punkte, nicht bloß (laut Definition) überhaupt eine mit  $\mathfrak{T}$  vertauschbare kongruente Abbildung existiert, die  $A$  in  $B$  überführt, sondern daß insbesondere diejenige Translation, welche  $A$  nach  $B$  bringt, die geforderte Eigenschaft besitzt. Eine Translation ist daher mit allen Translationen vertauschbar; und eine kongruente Abbildung, die mit allen Translationen vertauschbar ist, notwendig selber eine Translation. Daraus folgt noch, daß diejenige kongruente Abbildung, die durch Hintereinanderausführung

zweier Translationen entsteht, und ebenso die »Inverse« einer Translation (d. i. diejenige Abbildung, welche die Translation gerade wieder rückgängig macht) eine Translation ist: die Translationen bilden eine »Gruppe«.

Ist so der Begriff der Translation unabhängig von dem der Rotation begründet, so läßt sich der obigen rotativen Auffassung von Gerade und Ebene eine translativ gegenüberstellen. Sei  $\alpha$  eine Translation, die Punkt  $A_0$  in  $A_1$  überführt. Diese selbe Translation wird  $A_1$  in ein Punkt  $A_2$ ,  $A_2$  in  $A_3$  überführen usw.; durch sie wird  $A_0$  aus einem gewissen Punkt  $A_{-1}$  hervorgehen,  $A_{-1}$  aus  $A_{-2}$  usw. Damit erhalten wir zwar noch nicht die Gerade, aber eine Folge äquidistanter Punkte ihrer. Nun existiert jedoch, wenn  $n$  eine natürliche Zahl ist, eine Translation  $\frac{\alpha}{n}$ , die bei  $n$ -maliger Wiederholung  $\alpha$  ergibt. Verwenden wir vom Punkte  $A_0$  unsern Ausgang nehmend,  $\frac{\alpha}{n}$  in der gleichen Weise

eben  $\alpha$ , so erhalten wir eine  $n$ -mal so dichte Punkterfüllung der zu konstruierenden Geraden. Nehmen wir hier für  $n$  alle möglichen ganzen Zahlen, so wird diese Erfüllung, je größer  $n$  wird, um so dichter werden, und alle Punkte, die wir erhalten, verfließen zu einem Linienkontinuum, in das sie sich unter Aufgabe ihrer selbständigen Existenz einbetten (ich appelliere hier an die Anschauung der Kontinuität). Eine gerade Linie, können wir sagen, entsteht aus einem Punkte durch unendliche wiederholte Ausführung derselben infinitesimalen Translation und ihrer Inversen. Eine Ebene aber entsteht durch Translation einer Geraden an einer andern  $h$ : sind  $g, h$  zwei verschiedene, durch den Punkt  $A_0$  gehende Gerade, so übe man auf  $g$  alle Translationen aus, welche  $A_0$  sich überführen; die sämtlichen so aus  $g$  entstehenden Geraden bilden die Verbindungsebene von  $g$  und  $h$ .

Es kommt erst Ordnung in den logischen Aufbau der Geometrie, wenn man den allgemeinen Begriff der kongruenten Abbildung zunächst auf den der Translation verengert und diesen als Grundstein des mathematischen Fundaments verwendet (§§ 2, 3). Doch kommen wir dadurch nur zu einer rein translativen, der »affinen« Geometrie, in deren Rahmen nachher der allgemeine Begriff der Kongruenz wieder eingeführt werden muß (§ 4). Nachdem die Anschauung uns die nötigen Unterlagen geliefert hat, treten wir mit dem nächsten Paragraphen in die Domäne der deduktiven Mathematik hinüber.

## § 2. Grundlagen der affinen Geometrie.

Eine Translation oder Verschiebung  $\alpha$  des Raumes wollen wir bisher weiteres als einen *Vektor* bezeichnen; später freilich werden wir mit diesem Namen eine allgemeinere Vorstellung verbinden. Daß bei der Verschiebung  $\alpha$  der Punkt  $P$  in  $Q$  übergeht, werde auch so ausgedrückt:  $Q$  ist der Endpunkt des von  $P$  aus aufgetragenen Vektors  $\alpha$ . Sind  $P$  und  $Q$  irgend zwei Punkte, so gibt es eine und nur eine Verschiebung  $\alpha$

$P$  in  $Q$  überführt; wir nennen sie den durch  $P$  und  $Q$  bestimmten Vektor und bezeichnen ihn mit  $\overrightarrow{PQ}$ .

Diejenige Translation  $c$ , die durch Hintereinanderausführung zweier Translationen  $a$  und  $b$  entsteht, werde als die Summe von  $a$  und  $b$  bezeichnet:  $c = a + b$ . Aus der Definition der Summe ergibt sich 1) die Bedeutung der Multiplikation (Wiederholung) und der Teilung eines Vektors durch eine ganze Zahl; 2) der Sinn der Operation  $-$ , welche den Vektor  $a$  in den inversen  $-a$  verkehrt; 3) was unter dem Vektor  $o$  zu verstehen ist, nämlich die alle Punkte festlassende »Identität«. Es ist  $a + o = a$ ,  $a + (-a) = o$ . Weiter folgt daraus die Bedeutung des Symbols  $\pm \frac{m}{n}a = \lambda a$ , in welchem  $m$  und  $n$  irgend zwei natürliche Zahlen sind und  $\lambda$  den Bruch  $\pm \frac{m}{n}$  bezeichnet. Durch die Forderung der Stetigkeit ist damit auch festgelegt, was unter dem Vektor  $\lambda a$  zu verstehen ist, wenn  $\lambda$  eine beliebige reelle Zahl. Wir stellen folgendes einfache Axiomensystem der affinen Geometrie auf.

### I. Vektoren.

*Je zwei Vektoren  $a$  und  $b$  bestimmen eindeutig einen Vektor  $a + b$  als ihre »Summe«; eine Zahl  $\lambda$  und ein Vektor  $a$  bestimmen eindeutig einen Vektor  $\lambda a$ , das » $\lambda$ -fache von  $a$ « (Multiplikation). Diese Operationen genügen folgenden Gesetzen.*

#### *$\alpha$ ) Addition.*

1.  $a + b = b + a$  (kommutatives Gesetz).
2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (assoziatives Gesetz).
3. Sind  $a$  und  $c$  irgend zwei Vektoren, so gibt es einen und nur einen  $x$ , für welchen die Gleichung  $a + x = c$  gilt. Er heißt die Differenz  $c - a$  von  $c$  und  $a$ . (Möglichkeit der Subtraktion.)

#### *$\beta$ ) Multiplikation.*

1.  $(\lambda + \mu)a = (\lambda a) + (\mu a)$  (erstes distributives Gesetz).
2.  $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$  (assoziatives Gesetz).
3.  $1a = a$ .
4.  $\lambda(a + b) = (\lambda a) + (\lambda b)$  (zweites distributives Gesetz).

1. und 2. folgen für rationale Multiplikatoren  $\lambda, \mu$  aus den Additionsaxiomen; gemäß dem Prinzip der Stetigkeit nehmen wir sie auch für beliebige reelle Zahlen in Anspruch, formulieren sie aber ausdrücklich als Axiome, da sie sich in dieser Allgemeinheit rein logisch nicht aus den Additionsaxiomen herleiten lassen: sie setzen uns in den Stand, aus dem logischen Aufbau der Geometrie die schwer zu greifende Stetigkeit ganz zu verbannen. 4. faßt die Ähnlichkeitssätze zusammen.

$\gamma$ ) Das »Dimensionsaxiom«, das hier seine Stelle im System findet, werden wir erst hernach formulieren.

## II. Punkte und Vektoren.

1. Je zwei Punkte  $A$  und  $B$  bestimmen einen Vektor  $\vec{a}$ ; in Zeichen  $\vec{AB} = \vec{a}$ . Ist  $A$  irgend ein Punkt,  $\vec{a}$  irgend ein Vektor, so gibt es eine und nur einen Punkt  $B$ , für welchen  $\vec{AB} = \vec{a}$  ist.
2. Ist  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{BC} = \vec{b}$ , so ist  $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ .

In diesen Axiomen treten zwei Grundkategorien von Gegenständen auf: die Punkte und die Vektoren; drei Grundbeziehungen, nämlich diejenigen, welche durch die Symbole

$$(I) \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}, \quad \vec{b} = \lambda \vec{a}, \quad \vec{AB} = \vec{a}$$

ausgedrückt werden. Alle Begriffe, die sich allein mit ihrer Hilfe rein logisch definieren lassen, gehören zur affinen Geometrie; alle Sätze, welche sich aus diesen Axiomen rein logisch folgern lassen, bilden das Lehrgebäude der affinen Geometrie, das somit auf der hier gelegten axiomatischen Basis deduktiv errichtet werden kann. Übrigens sind unsere Axiome nicht alle logisch unabhängig voneinander, sondern die Additionsaxiome für Vektoren (Ia, 2. und 3.) folgen aus denen, (II), welche die Beziehung zwischen Punkten und Vektoren regeln. Es lag uns aber daran, daß die Axiome I über Vektoren für sich schon ausreichen, um alle Tatsachen, welche nur die Vektoren (und nicht die Beziehungen zwischen Punkten und Vektoren) betreffen, aus ihnen zu folgern.

Aus den Additionsaxiomen Ia läßt sich schließen, daß ein bestimmter Vektor  $\vec{o}$  existiert, der für jeden Vektor  $\vec{a}$  die Gleichung  $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$  erfüllt; aus den Axiomen II ergibt sich weiter, daß  $\vec{AB}$  dann und nur dann dieser Vektor  $\vec{o}$  ist, wenn die Punkte  $A$  und  $B$  zusammenfallen.

Ist  $O$  ein Punkt,  $e$  ein von  $O$  verschiedener Vektor, so bilden die Endpunkte  $P$  aller Vektoren  $\vec{OP}$  von der Form  $\xi e$  ( $\xi$  eine beliebige reelle Zahl) eine Gerade. Durch diese Erklärung wird die translativ Auffassung der Geraden in eine exakte, nur die Grundbegriffe des affinen Axiomensystems benutzende Definition gekleidet. Diejenigen Punkte  $P$ , für welche die Abszisse  $\xi$  positiv ist, bilden die eine Hälfte, diejenigen, für welche  $\xi$  negativ ist, die andere Hälfte der Geraden von  $O$  aus. Schreiben wir  $e_1$  statt  $e$  und ist  $e_2$  ein weiterer Vektor, der nicht von der Form  $\xi e_1$  ist, so bilden die Endpunkte  $P$  aller Vektoren  $\vec{OP}$  von der Form  $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$  eine Ebene (translative Entstehung der Ebene durch Verschiebung einer Geraden längs einer andern). Verschieben wir endlich die Ebene  $E$  längs einer durch  $O$  hindurchgehenden, aber nicht in  $E$  gelegenen Geraden, durchstreicht sie den ganzen Raum. Ist mithin  $e_3$  ein Vektor, der nicht unter der Form  $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$  enthalten ist, so kann jeder Vektor auf eine und nur eine Weise als eine lineare Kombination

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$$

von  $e_1, e_2, e_3$  dargestellt werden. Es ergeben sich hier naturgemäß folgende Begriffsbestimmungen.

Eine endliche Anzahl von Vektoren  $e_1, e_2, \dots, e_h$  heißt *linear unabhängig*, wenn

$$(2) \quad \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_h e_h$$

nur dann  $= 0$  ist, falls sämtliche Koeffizienten  $\xi$  verschwinden. Unter dieser Voraussetzung bilden, wie wir uns ausdrücken wollen, die sämtlichen Vektoren von der Form (2) eine  *$h$ -dimensionale lineare Vektor-Mannigfaltigkeit*, und zwar diejenige, welche von den Vektoren  $e_1, e_2, \dots, e_h$  »aufgespannt« wird. Eine  *$h$ -dimensionale lineare Vektor-Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}$*  kann, unabhängig von der besonderen »Basis«  $e_i$ , folgendermaßen gekennzeichnet werden:

1. Die beiden Grundoperationen: Addition zweier Vektoren und Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl führen nicht aus der Mannigfaltigkeit heraus; d. h. die Summe zweier zu  $\mathfrak{M}$  gehöriger Vektoren wie auch das Produkt eines zu  $\mathfrak{M}$  gehörigen Vektors mit einer beliebigen reellen Zahl liegt stets wieder in  $\mathfrak{M}$ .

2. Es existieren in  $\mathfrak{M}$  wohl  *$h$  linear unabhängige Vektoren*, aber je  *$h + 1$  sind voneinander linear abhängig*.

Aus der 2. Eigenschaft (die aus unserer ursprünglichen Definition mit Hilfe der elementarsten Sätze über lineare Gleichungen folgt) entnehmen wir, daß die Dimensionszahl  *$h$*  für die Mannigfaltigkeit als solche charakteristisch ist und nicht abhängig von der speziellen Vektorbasis, durch welche wir sie »aufspannen«.

Das in der obigen Tabelle der Axiome noch ausgelassene *Dimensionsaxiom* kann jetzt so formuliert werden:

*Es gibt  $n$  linear unabhängige Vektoren, aber je  $n + 1$  sind voneinander linear abhängig,*

oder: die Vektoren bilden eine  *$n$ -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit*. Das führt für  $n = 3$  auf die affine räumliche Geometrie, für  $n = 2$  auf die Ebene, für  $n = 1$  auf die Geometrie der Geraden. Bei der deduktiven Behandlung der Geometrie wird es aber zweckmäßig sein, den Wert von  $n$  unbestimmt zu lassen und so eine » *$n$ -dimensionale Geometrie*« zu entwickeln, in welcher die der Geraden, der Ebene und des Raumes als die speziellen Fälle  $n = 1, 2, 3$  enthalten sind. Denn wir sehen (hier für die affine, hernach für die vollständige Geometrie), daß in der mathematischen Struktur des Raumes nichts liegt, was uns nötigt, bei der Dimensionszahl 3 stehen zu bleiben. Gegenüber der in unsern Axiomen ausgedrückten mathematischen Gesetzmäßigkeit des Raumes erscheint seine spezielle Dimensionszahl 3 als eine Zufälligkeit, über die wir in einer systematischen deduktiven Theorie hinwegschreiten müssen. Auf die damit gewonnene Idee einer  *$n$ -dimensionalen Geometrie* kommen wir noch im nächsten Paragraphen zurück <sup>4)</sup>. Zunächst müssen wir die begonnenen Erklärungen vervollständigen.

Ist  $O$  ein beliebiger Punkt, so erfüllen die sämtlichen Endpunkte  $P$  der von  $O$  aus aufgetragenen Vektoren einer  *$h$ -dimensionalen linearen*

Vektor-Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}$ , wie sie durch (2) dargestellt ist, ein *h-dimensionales lineares Punktgebilde*; wir sagen, es werde vom Punkte  $O$  aus durch die Vektoren  $e_1, e_2, \dots, e_h$  aufgespannt. (Das 1 dimensionale Gebilde heißt Gerade, das 2 dimensionale Ebene.) Der Punkt  $O$  spielt auf dem linearen Gebilde keine ausgezeichnete Rolle; ist  $O'$  irgend ein Punkt desselben, so durchläuft  $\vec{O'P}$ , wenn für  $P$  alle möglichen Punkte des linearen Gebildes eintreten, die gleiche Vektor-Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}$ . Tragen wir die sämtlichen Vektoren der Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}$  einmal von einem Punkte  $O$ , ein andermal von einem beliebigen andern Punkte  $O'$  auf, so nennen wir die beiden entstehenden linearen Punktgebilde zueinander *parallel*. Darin liegt insbesondere die Definition paralleler Geraden und paralleler Ebenen. Derjenige Teil des durch Abtragen aller Vektoren (2) von  $O$  aus entstandenen  $h$ -dimensionalen linearen Gebildes, den wir erhalten, wenn wir die  $\xi$  der Beschränkung

$$0 \leq \xi_1 \leq 1, \quad 0 \leq \xi_2 \leq 1, \quad \dots, \quad 0 \leq \xi_h \leq 1$$

unterwerfen, werde das von  $O$  aus durch die Vektoren  $e_1, e_2, \dots, e_h$  aufgespannte  $h$ -dimensionale *Parallelepiped* genannt. (Das 1 dimensionale Parallelepiped heißt Strecke, ein 2 dimensionales Parallelogramm. — All diese Begriffe tragen die Beschränkung auf den uns anschaulich gegebene Fall  $n = 3$  nicht in sich.)

Einen Punkt  $O$  zusammen mit  $n$  linear unabhängigen Vektoren  $e_1, e_2, \dots, e_n$  nennen wir ein Koordinatensystem  $(\mathfrak{C})$ . Jeder Vektor  $\mathfrak{x}$  kann auf eine und nur eine Weise in der Form

$$(3) \quad \mathfrak{x} = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$$

dargestellt werden; die Zahlen  $\xi_i$  nennen wir seine *Komponenten* in dem Koordinatensystem  $(\mathfrak{C})$ . Ist  $P$  ein beliebiger Punkt und  $\vec{OP}$  gleich dem Vektor (3), so heißen die  $\xi_i$  außerdem die *Koordinaten* von  $P$ . Alle Koordinatensysteme sind in der affinen Geometrie gleichberechtigt: gibt keine affingeometrische Eigenschaft, durch welche sich das eine von dem andern unterscheidet. Ist

$$O'; e'_1, e'_2, \dots, e'_n$$

ein zweites Koordinatensystem, so werden Gleichungen gelten

$$(4) \quad e'_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} e_k,$$

in denen die  $\alpha_{ki}$  ein Zahlensystem bilden, das wegen der linearen Unabhängigkeit der  $e'_i$  eine von 0 verschiedene Determinante besitzen muß. Sind  $\xi_i$  die Komponenten eines Vektors  $\mathfrak{x}$  im ersten,  $\xi'_i$  im zweiten Koordinatensystem, so besteht der Zusammenhang

$$(5) \quad \xi_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \xi'_k,$$

wie man findet, indem man die Ausdrücke (4) in die Gleichung

$$\sum_i \xi_i e_i = \sum_i \xi'_i e'_i$$

einsetzt.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  seien die Koordinaten von  $O'$  im ersten Koordinatensystem. Sind  $x_i$  die Koordinaten eines beliebigen Punktes im ersten,  $x'_i$  im zweiten Koordinatensystem, so gelten die Gleichungen

$$(6) \quad x_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x'_k + \alpha_i.$$

Denn  $x_i - \alpha_i$  sind die Komponenten von

$$\vec{O'P} = \vec{OP} - \vec{OO'}$$

im ersten,  $x'_i$  im zweiten Koordinatensystem. Die Transformationsformeln (6) für die Koordinaten sind also linear; diejenigen (5) für die Vektorkomponenten entstehen aus ihnen einfach dadurch, daß die von den Variablen freien konstanten Glieder  $\alpha_i$  gestrichen werden. — Es ist eine analytische Behandlung der affinen Geometrie möglich, bei der jeder Vektor durch seine Komponenten, jeder Punkt durch seine Koordinaten repräsentiert wird. Die geometrischen Beziehungen zwischen Punkten und Vektoren drücken sich dann aus als solche zwischen ihren Komponenten bzw. Koordinaten bestehende Zusammenhänge, die durch beliebige lineare Transformation nicht zerstört werden.

Die Formeln (5), (6) lassen noch eine andere Deutung zu: sie können als die Darstellung einer *affinen Abbildung* in einem bestimmten Koordinatensystem aufgefaßt werden. Eine Abbildung, d. i. ein Gesetz, das jedem Vektor  $\mathfrak{x}$  einen »Bild«-Vektor  $\mathfrak{x}'$ , jedem Punkt  $P$  einen »Bild«-Punkt  $P'$  zuordnet, heißt linear oder affin, wenn durch die Abbildung die affinen Grundbeziehungen (1) nicht zerstört werden — wenn also das Bestehen von (1) die gleichen Relationen für die Bild-Vektoren und Punkte zur Folge hat:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}' = \mathfrak{c}', \quad \mathfrak{b}' = \lambda \mathfrak{a}', \quad \vec{A'B'} = \mathfrak{a}' -$$

und wenn außerdem das Bild keines von  $o$  verschiedenen Vektors  $= o$  ist, oder anders ausgedrückt: wenn aus zwei Punkten nur dann der gleiche Bildpunkt hervorgeht, falls sie selber identisch sind. Zwei Figuren, die durch affine Abbildung auseinander hervorgehen, sind affin. Sie sind vom Standpunkt der affinen Geometrie einander völlig gleich; es kann keine affine Eigenschaft geben, welche der einen zukäme, der andern aber nicht. Der Begriff der linearen Abbildung spielt also für die affine Geometrie die gleiche Rolle wie die Kongruenz in der vollständigen Geometrie; daraus geht seine prinzipielle Bedeutung hervor. Linear unabhängige Vektoren gehen durch affine Abbildung wieder in linear unabhängige über; ein  $n$ -dimensionales lineares Gebilde in ein ebensolches Gebilde; parallele in parallele; ein Koordinatensystem  $O|e_1, e_2, \dots, e_n$  in ein neues Koordinatensystem  $O'|e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ . Die Zahlen  $\alpha_{ki}, \alpha_i$  mögen die gleiche

Bedeutung haben wie oben. Der Vektor (3) verwandelt sich durch die affine Abbildung in

$$\mathbf{x}' = \xi_1 \mathbf{e}'_1 + \xi_2 \mathbf{e}'_2 + \cdots + \xi_n \mathbf{e}'_n.$$

Setzen wir die Ausdrücke von  $\mathbf{e}'_i$  ein, benutzen zur Darstellung der affinen Abbildung das ursprüngliche Koordinatensystem  $O|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  und verstehen unter  $\xi_i$  die Komponenten irgend eines Vektors, unter  $\xi'_i$  die seines Bildvektors, so ist also

$$(5') \quad \xi'_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \xi_k.$$

Geht  $P$  über in  $P'$ , so der Vektor  $\vec{OP}$  in  $\vec{O'P'}$ ; daraus folgt: sind  $x_i$  die Koordinaten von  $P$ ,  $x'_i$  die von  $P'$ , so gilt

$$x'_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x_k + \alpha_i.$$

In der analytischen Geometrie pflegt man die linearen Gebilde durch lineare Gleichungen für die Koordinaten des »laufenden Punktes« zu charakterisieren. Darauf werden wir im nächsten Paragraphen genauer eingehen; hier finde nur noch der Grundbegriff »lineare Form«, auf dem diese Darstellung beruht, seinen Platz. Eine Funktion  $L(\mathbf{x})$  — deren Argument  $\mathbf{x}$  alle Vektoren durchläuft, deren Werte aber reelle Zahlen sind — heißt eine *Linearform*, wenn sie die Funktionaleigenschaften besitzt:

$$L(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = L(\mathbf{a}) + L(\mathbf{b}); \quad L(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \cdot L(\mathbf{a}).$$

In einem Koordinatensystem  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  ist jede der  $n$  Vektorkomponenten  $\xi_i$  von  $\mathbf{x}$  eine solche Linearform. Für eine beliebige Linearform  $L$  gilt, wenn  $\mathbf{x}$  durch (3) definiert ist,

$$L(\mathbf{x}) = \xi_1 L(\mathbf{e}_1) + \xi_2 L(\mathbf{e}_2) + \cdots + \xi_n L(\mathbf{e}_n);$$

setzen wir also  $L(\mathbf{e}_i) = a_i$ , so erscheint die Linearform, in Komponenten dargestellt, unter der Gestalt

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \cdots + a_n \xi_n;$$

die  $a_i$  sind ihre konstanten Koeffizienten. Umgekehrt wird durch jede Ausdruck dieser Art eine Linearform gegeben. Mehrere Linearformen  $L_1, L_2, \dots, L_h$  sind linear unabhängig, wenn keine Konstanten  $\lambda_i$  existieren für welche identisch in  $\mathbf{x}$  die Gleichung

$$\lambda_1 L_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 L_2(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_h L_h(\mathbf{x}) = 0$$

besteht, außer  $\lambda_i = 0$ .  $n + 1$  Linearformen sind stets linear abhängig voneinander.

### § 3. Idee der $n$ -dimensionalen Geometrie. Lineare Algebra. Quadratische Formen.

Um die Raumgesetze in ihrer vollen mathematischen Harmonie erfassen, müssen wir von der besonderen Dimensionszahl  $n = 3$  abstrahieren. Es hat sich nicht nur in der Geometrie, sondern in noch

staunlicherem Maße in der Physik immer wieder gezeigt, daß, sobald wir die Naturgesetze, von denen die Wirklichkeit beherrscht ist, erst einmal völlig durchdringen, diese sich in mathematischen Beziehungen von der durchsichtigsten Einfachheit und vollendetsten Harmonie darstellen. Den Sinn für diese Einfachheit und Harmonie, den wir heute in der theoretischen Physik nicht missen können, zu entwickeln, scheint mir eine Hauptaufgabe des mathematischen Unterrichts zu sein; sie ist für uns eine Quelle hoher Erkenntnisbefriedigung. Die analytische Geometrie, in so gedrängter und prinzipieller Form vorgetragen, wie ich es hier versuche, gibt einen ersten, aber noch unzulänglichen Begriff davon. Doch nicht nur um solcher Zwecke willen müssen wir uns über die Dimensionszahl  $n = 3$  erheben, sondern wir benötigen für spätere konkrete physikalische Probleme, wie sie die Relativitätstheorie mit sich bringt, in der die Zeit zum Raum hinzutritt, die vierdimensionale Geometrie.

Man braucht keineswegs die Geheimlehren der Spiritisten zu Rate zu ziehen, um sich den Gedanken einer mehrdimensionalen Geometrie anschaulich näher zu bringen. Betrachten wir z. B. homogene Gasgemische aus Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Kohlensäure. Ein beliebiges Quantum eines solchen Gemisches ist charakterisiert durch die Angabe, wieviel Gramm jedes Gases in ihm enthalten sind. Nennen wir jedes solche Quantum einen Vektor (Namen können wir geben, wie wir wollen) und verstehen unter Addition die Vereinigung zweier Gasquanten im gewöhnlichen Sinne, so sind die sämtlichen auf Vektoren bezüglichen Axiome  $I$  unseres Systems mit der Dimensionenzahl  $n = 4$  erfüllt, wenn wir uns erlauben, auch von negativen Gasquanten zu reden. 1 gr reinen Wasserstoffs, 1 gr Sauerstoff, 1 gr Stickstoff und 1 gr Kohlensäure sind vier voneinander unabhängige »Vektoren«, aus denen sich alle andern linear zusammensetzen lassen, bilden also ein Koordinatensystem. — Oder ein anderes Beispiel: Auf jeder von 5 parallelen Stangen ist eine kleine Kugel verschiebbar. Ein bestimmter Zustand dieser primitiven »Rechenmaschine« ist gegeben, wenn die Stelle, an der sich jede der 5 Kugeln auf ihrer Stange befindet, bekannt ist. Nennen wir jeden solchen Zustand einen »Punkt« und jede simultane Verschiebung der 5 Kugeln einen »Vektor«, so sind unsere sämtlichen Axiome erfüllt mit der Dimensionszahl  $n = 5$ . — Man sieht schon hieraus: es lassen sich anschauliche Gebilde mancherlei Art konstruieren, die bei geeigneter Namengebung unseren Axiomen genügen.

Viel wichtiger aber als diese etwas spielerischen Exempel ist das folgende, welches zeigt, daß *unsere Axiome die Operationsbasis für die Theorie der linearen Gleichungen charakterisieren*. Sind  $\alpha_i$  und  $\alpha$  gegebene Zahlen, so nennt man bekanntlich

$$(7) \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

eine *homogene*,

$$(8) \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \alpha$$

eine *inhomogene* lineare Gleichung für die Unbekannten  $x_i$ . Zur Behandlung der *Theorie der linearen homogenen Gleichungen* ist es gut, für ein Wertsystem der Variablen  $x_i$  einen kurzen Namen zu haben; wir bezeichnen es als »Vektor«. Mit diesen Vektoren soll so gerechnet werden, daß unter der Summe der beiden Vektoren

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ und } (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

der Vektor

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

verstanden wird und unter dem  $\lambda$ -fachen des ersten der Vektor

$$(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

Dann sind die Axiome I über Vektoren erfüllt mit der Dimensionszahl

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

bilden ein System unabhängiger Vektoren; die Komponenten eines beliebigen Vektors  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  in diesem Koordinatensystem sind die Zahlen  $x_i$  selber. Der Hauptsatz über die Lösung linearer homogener Gleichungen läßt sich jetzt so aussprechen: Sind  $L_1(x), L_2(x), \dots, L_h(x)$   $h$  linear unabhängige Linearformen, so bilden die Lösungen  $x$  der Gleichungen

$$L_1(x) = 0, L_2(x) = 0, \dots, L_h(x) = 0$$

eine  $(n - h)$ -dimensionale lineare Vektor-Mannigfaltigkeit.

In der *Theorie der inhomogenen linearen Gleichungen* wollen wir ein Wertsystem der Variablen  $x_i$  lieber als einen »Punkt« bezeichnen. Sind  $x_i$  und  $x'_i$  zwei Lösungssysteme der Gleichung (8), so ist ihre Differenz

$$x'_1 - x_1, x'_2 - x_2, \dots, x'_n - x_n$$

eine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung (7). Wir wollen deshalb diese Differenz zweier Wertsysteme der Variablen  $x_i$  einen »Vektor« nennen, und zwar den durch die beiden »Punkte«  $(x_i)$  und  $(x'_i)$  bestimmten Vektor, und über die Addition von Vektoren und ihre Multiplikation mit einer Zahl die obigen Verabredungen treffen. Dann gelten die sämtlichen Axiome. Für das besondere Koordinatensystem, das aus den oben gegebenen Vektoren  $e_i$  besteht und dem »Anfangspunkt«  $O = (0, 0, \dots, 0)$  sind die Koordinaten eines Punktes  $(x_i)$  die Zahlen  $x_i$  selber. Der Hauptsatz über lineare Gleichungen lautet: Diejenigen Punkte, welche  $h$  unabhängigen linearen Gleichungen genügen, bilden ein  $(n - h)$ -dimensionales lineares Punktgebilde.

So würde man auch ohne Geometrie von der Theorie der linearen Gleichungen her auf die natürlichste Weise nicht nur zu unsern Axiomen geführt werden, sondern auch zu den weiteren Begriffsbildungen, die an sie angeschlossen haben. Ja es wäre sogar in mancher Hinsicht zweckmäßig (wie namentlich die Formulierung des Satzes über homogene Gleichungen zeigt), die Theorie der linearen Gleichungen auf axiomatischer Basis in der Weise zu entwickeln, daß man die hier von der Geom.

her gewonnenen Axiome an die Spitze stellt. Sie würde dann gültig sein für irgend ein Operationsgebiet, das jenen Axiomen genügt, und nicht bloß für die »Wertsysteme von  $n$  Variablen«. Freilich ist der Übergang von einer solchen mehr begrifflichen zu der üblichen, von vornherein mit Zahlen  $x_i$  operierenden mehr formalen Theorie ohne weiteres dadurch zu vollziehen, daß man ein bestimmtes Koordinatensystem zugrunde legt und nun statt der Vektoren und Punkte ihre Komponenten und Koordinaten benutzt.

Aus allem geht hervor, daß die ganze affine Geometrie über den Raum nur dieses lehrt (man wird uns ohne genauere Erklärung verstehen), daß er *ein dreidimensionales lineares Größengebiet* ist. Alle die anschaulichen Einzeltatsachen, deren in § 1 Erwähnung geschah, sind nur Verkleidungen dieser einen einfachen Wahrheit. Ist es nun auf der einen Seite außerordentlich befriedigend, für die vielerlei Aussagen über den Raum, räumliche Gebilde und räumliche Beziehungen, aus denen die Geometrie besteht, diesen einen gemeinsamen Erkenntnisgrund angeben zu können, so muß auf der andern Seite betont werden, daß dadurch aufs deutlichste hervortritt, wie wenig die Mathematik Anspruch darauf machen kann, das anschauliche Wesen des Raumes zu erfassen: von dem, was den Raum der Anschauung zu dem macht, was er *ist* in seiner ganzen Besonderheit und was er nicht teilt mit »Zuständen von Rechenmaschinen« und »Gasgemischen« und »Lösungssystemen linearer Gleichungen«, enthält die Geometrie nichts. Dies »begrifflich« zu machen oder ev. zu zeigen, warum und in welchem Sinne es unbegrifflich ist, bleibt der Metaphysik überlassen. Wir Mathematiker können stolz sein auf die wunderbare Durchsichtigkeit der Erkenntnis vom Raume, welche wir gewinnen; aber wir müssen uns zugleich sehr bescheiden, da unsere begrifflichen Theorien nur imstande sind, das Raumwesen nach einer Seite hin, noch dazu seiner oberflächlichsten und formalsten, zu erfassen. —

Aus dem Gebiete der linearen Algebra haben wir, um von der affinen zur vollständigen metrischen Geometrie überzuleiten, noch einige Begriffe und Tatsachen nötig, die sich auf *bilineare* und *quadratische Formen* beziehen. Eine Funktion  $Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$  zweier willkürlicher Vektoren  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{y}$  heißt, wenn sie eine lineare Form sowohl in  $\mathfrak{x}$  wie in  $\mathfrak{y}$  ist, eine Bilinearform. Sind bei Benutzung eines bestimmten Koordinatensystems  $\xi_i$  die Komponenten von  $\mathfrak{x}$ ,  $\eta_i$  die von  $\mathfrak{y}$ , so gilt eine Gleichung

$$Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \eta_k$$

mit konstanten Koeffizienten  $a_{ik}$ . Wir wollen die Form »nicht-ausgeartet« nennen, wenn sie für einen Vektor  $\mathfrak{x}$  identisch in  $\mathfrak{y}$  nur dann verschwindet, falls  $\mathfrak{x} = 0$  ist. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn die homogenen Gleichungen

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} \xi_i = 0$$

die einzige Lösung  $\xi_i = 0$  besitzen oder wenn die Determinante  $|a_{ik}| \neq 0$  ist. Aus der Erklärung geht hervor, daß diese Bedingung des Nicht-Verschwindens der Determinante bei beliebiger linearer Transformation erhalten bleibt. Die Bilinearform heißt *symmetrisch*, wenn  $Q(\xi\eta) = Q(\eta\xi)$  ist; an den Koeffizienten gibt sich das durch die Symmetrie-Eigenschaft  $a_{ki} = a_{ik}$  kund. Aus jeder Bilinearform  $Q(\xi\eta)$  entsteht eine nur von einem variablen Vektor  $\xi$  abhängige *quadratische Form*

$$Q(\xi) = Q(\xi\xi) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k.$$

Auf diese Weise entsteht jede quadratische Form insbesondere aus einer und nur einer *symmetrischen* Bilinearform. Die eben gebildete quadratische Form  $Q(\xi)$  kann nämlich auch durch Identifizierung von  $\xi$  und  $\eta$  erzeugt werden aus der symmetrischen Form

$$\frac{1}{2} \{Q(\xi\eta) + Q(\eta\xi)\}.$$

Daß aus zwei verschiedenen symmetrischen Bilinearformen nicht dieselbe quadratische Form hervorgehen kann, ist bewiesen, wenn man zeigt, daß eine symmetrische Bilinearform  $Q(\xi\eta)$ , die identisch in  $\xi$  der Gleichung  $Q(\xi\xi) = 0$  genügt, identisch verschwinden muß. Dies geht aber aus der für jede symmetrische Bilinearform gültigen Relation

$$(9) \quad Q(\xi + \eta, \xi + \eta) = Q(\xi\xi) + 2 Q(\xi\eta) + Q(\eta\eta)$$

hervor. Ist  $Q(\xi)$  das Zeichen für eine beliebige quadratische Form, so bedeutet  $Q(\xi\eta)$  immer, ohne daß wir es jedesmal erwähnen, diejenige symmetrische Bilinearform, aus welcher  $Q(\xi)$  entsteht. Daß eine quadratische Form nicht-ausgeartet sei, soll bedeuten, daß jene symmetrische Bilinearform nicht-ausgeartet ist. Eine quadratische Form  $Q(\xi)$  ist *positiv-definit*, wenn sie der Ungleichung  $Q(\xi) > 0$  für jeden Vektor  $\xi \neq 0$  genügt. Eine solche ist gewiß nicht-ausgeartet; denn für keinen Vektor  $\xi \neq 0$  kann dann  $Q(\xi\eta)$  identisch in  $\eta$  gleich 0 sein, da es für  $\eta = \xi$  positiv ausfällt.

#### § 4. Grundlagen der metrischen Geometrie.

Um den Übergang von der affinen zur metrischen Geometrie zu bewerkstelligen, müssen wir noch einmal aus dem Born der Anschauung schöpfen. Ihr entnehmen wir (für den dreidimensionalen Raum) die Erklärung jener Größe, die man als das *skalare Produkt* zweier Vektoren  $\alpha$  und  $\beta$  bezeichnet. Nach Wahl eines bestimmten Einheitsvektors messe wir die Länge von  $\alpha$  und die (mit dem richtigen Vorzeichen zu versehen) Länge der senkrechten Projektion von  $\beta$  auf  $\alpha$  und multiplizieren diese beiden Maßzahlen miteinander. Dabei sind also nicht bloß, wie der affinen Geometrie, parallele Strecken ihrer Länge nach zu vergleichen sondern solche von beliebiger Richtung gegeneinander. Für das skalare Produkt gelten folgende Rechengesetze:

$$\lambda \alpha \cdot \beta = \lambda (\alpha \cdot \beta); \quad (\alpha + \alpha') \cdot \beta = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha' \cdot \beta)$$

und das analoge in bezug auf den zweiten Faktor; außerdem das kommutative  $a \cdot b = b \cdot a$ . Das skalare Produkt von  $a$  mit sich selbst,  $a \cdot a = a^2$ , ist stets positiv, außer wenn  $a = 0$ , und gleich dem Quadrat der Länge von  $a$ . Diese Gesetze besagen: das skalare Produkt zweier willkürlicher Vektoren  $x \cdot y$  ist eine symmetrische Bilinearform, und die aus ihr entstehende quadratische Form ist positiv-definit. Man erkennt also: nicht die Länge, sondern das Quadrat der Länge eines Vektors hängt in einfacher, rationaler Weise von dem Vektor selbst ab, ist nämlich eine quadratische Form; das macht den eigentlichen Inhalt des *Pythagoreischen Lehrsatzes* aus. Das skalare Produkt ist nichts anderes als die symmetrische Bilinearform, aus welcher diese quadratische Form entsteht. Wir formulieren demnach folgendes

*Metrische Axiom: Nach Wahl eines von 0 verschiedenen Einheitsvektors  $e$  bestimmen je zwei Vektoren  $x$  und  $y$  eindeutig eine Zahl  $(x \cdot y) = Q(x, y)$ ; sie ist in ihrer Abhängigkeit von den beiden Vektoren eine symmetrische Bilinearform, die aus ihr entstehende quadratische Form  $(x \cdot x) = Q(x)$  positiv-definit.  $Q(e)$  ist  $= 1$ .*

$Q$  nennen wir die metrische Fundamentalform. Jetzt gilt: *Eine affine Abbildung, die allgemein den Vektor  $x$  in  $x'$  überführt, ist eine kongruente, wenn sie die metrische Fundamentalform invariant läßt:*

$$(10) \quad Q(x') = Q(x);$$

*zwei Figuren, die durch kongruente Abbildung ineinander übergeführt werden können, sind kongruent\*).* Bei unserm axiomatischen Aufbau definieren wir durch diese Aussagen den Begriff der Kongruenz. Liegt irgend ein Operationsbereich vor, in welchem die Axiome des § 2 erfüllt sind, so können wir eine beliebige positiv-definite quadratische Form in ihm wählen, sie zur metrischen Fundamentalform ernennen und auf Grund ihrer den Begriff der Kongruenz so definieren, wie es eben geschehen ist: dann ist durch jene Form in den affinen Raum eine Metrik eingetragen, und zwar gilt jetzt die gesamte Euklidische Geometrie. Wieder ist die Formulierung, zu der wir gelangt sind, nicht an eine spezielle Dimensionszahl gebunden. Aus (10) folgt mittels der Relation (9) des § 3, daß für eine kongruente Abbildung allgemeiner

$$Q(x'y') = Q(x'y)$$

gilt.

Da der Begriff der Kongruenz durch die metrische Fundamentalform definiert ist, so ist es kein Wunder, daß diese in alle Formeln eingeht, welche die Maße geometrischer Größen betreffen. Zwei Vektoren  $a$  und  $a'$  sind dann und nur dann kongruent, wenn

$$Q(a) = Q(a').$$

Wir könnten daher  $Q(a)$  als Maßzahl des Vektors  $a$  einführen; wir be-

\*) Wir unterdrücken hier den Unterschied zwischen direkter und spiegelbildlicher Kongruenz. Er findet schon für affine Abbildungen, und zwar im  $n$ -dimensionalen so gut wie im dreidimensionalen Raume, statt.

nutzen aber statt dessen die positive Quadratwurzel aus  $Q(a)$  und nennen diese die Länge des Vektors  $a$  (das ist jetzt Definition), damit die weitere Bedingung erfüllt ist, daß die Länge der Summe zweier paralleler und gleichgerichteter Vektoren gleich der Summe der Längen der beiden Einzelvektoren ist. Sind  $a, b$  ebenso wie  $a', b'$  je zwei Vektoren von der Länge 1, so ist die von den beiden ersten gebildete Figur dann und nur dann kongruent mit der aus den beiden letzten bestehenden, wenn

$$Q(a, b) = Q(a', b')$$

ist. Wieder aber führen wir nicht diese Zahl  $Q(a, b)$  selbst als Maßzahl des Winkels ein, sondern eine Zahl  $\vartheta$ , welche mit ihr durch die transzendente Funktion  $\cos$  zusammenhängt:

$$\cos \vartheta = Q(a, b),$$

damit der Satz gilt, daß sich bei Aneinanderlegung zweier Winkel in der gleichen Ebene die Maßzahlen der Winkel addieren. Der von zwei beliebigen Vektoren  $a$  und  $b$  ( $\neq 0$ ) gebildete Winkel  $\vartheta$  berechnet sich dann aus

$$(11) \quad \cos \vartheta = \frac{Q(a, b)}{\sqrt{Q(a) \cdot Q(b)}}.$$

Insbesondere heißen zwei Vektoren  $a, b$  *senkrecht* zueinander, wenn  $Q(ab) = 0$  ist. Diese Erinnerung an die einfachsten metrischen Formeln der analytischen Geometrie mag genügen.

Daß der durch (11) definierte Winkel zweier Vektoren immer reell ist, beruht auf der für jede quadratische Form  $Q$ , die für alle Argumentwerte  $\geq 0$  ist, gültigen Ungleichung

$$(12) \quad Q^2(ab) \leq Q(a) \cdot Q(b).$$

Sie ergibt sich am einfachsten, wenn man bildet:

$$Q(\lambda a + \mu b) = \lambda^2 Q(a) + 2\lambda\mu Q(ab) + \mu^2 Q(b) \geq 0.$$

Da die hier hingeschriebene quadratische Form von  $\lambda$  und  $\mu$  nie Werte beiderlei Vorzeichens annimmt, kann ihre Diskriminante  $Q^2(ab) - Q(a) \cdot Q(b)$  unmöglich positiv sein.

$n$  unabhängige Vektoren  $e_i$  bilden ein *Cartesisches Koordinatensystem*, wenn für jeden Vektor

$$(13) \quad \begin{aligned} x &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \\ Q(x) &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \end{aligned}$$

ist, d. h. wenn

$$Q(e_i, e_k) = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

ist. Alle Cartesischen Koordinatensysteme sind vom Standpunkt der metrischen Geometrie aus gleichberechtigt. Den sich aufs engste an die geometrische Anschauung anschließenden Beweis, daß solche Systeme existieren, wollen wir sogleich nicht bloß für eine definite, sondern für eine beliebige nicht-ausgeartete quadratische Form erbringen, da später in der Relativitätstheorie gerade der indefinite Fall von entscheidender Wichtigkeit wird. Wir behaupten:

Zu einer nicht-ausgearteten quadratischen Form  $Q$  kann man ein solches Koordinatensystem  $e_i$  einführen, daß

$$(14) \quad Q(x) = \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \cdots + \varepsilon_n x_n^2 \quad (\varepsilon_i = \pm 1)$$

wird.

Beweis: Wir wählen einen beliebigen Vektor  $e_1$ , für den  $Q(e_1) \neq 0$  ist; indem wir ihn mit einer geeigneten positiven Konstanten multiplizieren, können wir noch erreichen, daß  $Q(e_1) = \pm 1$  ist. Ein Vektor  $x$ , für den  $Q(e_1 x) = 0$  ist, wollen wir auch hier zu  $e_1$  orthogonal nennen. Ist  $x^*$  ein zu  $e_1$  orthogonaler Vektor,  $x_1$  eine beliebige Zahl, so gilt für

$$(15) \quad x = x_1 e_1 + x^*$$

der »Pythagoreische Lehrsatz«:

$$Q(x) = x_1^2 Q(e_1) + 2 x_1 Q(e_1 x^*) + Q(x^*) = \pm x_1^2 + Q(x^*).$$

Die zu  $e_1$  orthogonalen Vektoren bilden eine lineare  $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, in welcher  $Q(x)$  eine nicht-ausgeartete quadratische Form ist. Da unser Satz für die Dimensionszahl  $n=1$  selbstverständlich ist, dürfen wir annehmen, er gelte für  $n-1$  Dimensionen (Schluß von  $n-1$  auf  $n$ ). Danach existieren  $n-1$  zu  $e_1$  orthogonale Vektoren  $e_2, \dots, e_n$  derart, daß für

$$x^* = x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

die Formel gilt

$$Q(x^*) = \pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2,$$

und daraus erhalten wir für  $Q(x)$  die gewünschte Darstellung. Es ist

$$Q(e_i) = \varepsilon_i, \quad Q(e_i, e_k) = 0 \quad (i \neq k).$$

Daß die  $e_i$  alle voneinander linear unabhängig sind und sich jeder Vektor  $x$  in der Gestalt (13) darstellen läßt, ist eine Folge dieser Relationen; sie liefern

$$(16) \quad x_i = \varepsilon_i \cdot Q(e_i, x).$$

Für den indefiniten Fall ist ein wichtiger Zusatz zu machen: Die Anzahlen  $r$  und  $s$  der positiven und negativen unter den Vorzeichen  $\varepsilon_i$  sind durch die quadratische Form eindeutig bestimmt; ich will sagen, sie haben  $r$  positive und  $s$  negative Dimensionen. (Man pflegt  $s$  den Trägheitsindex der quadratischen Form zu nennen, und der eben behauptete Satz ist unter dem Namen des Trägheitsgesetzes bekannt. Auf ihm beruht z. B. die Klassifizierung der Flächen 2. Ordnung.) Wir können die Anzahlen  $r$  und  $s$  in folgender Weise invariant charakterisieren: Es gibt  $r$  wechselseitig zueinander orthogonale Vektoren  $e$ , für die  $Q(e) > 0$  ist; aber für einen zu diesen orthogonalen, von 0 verschiedenen Vektor  $x$  gilt notwendig  $Q(x) < 0$  — sodaß mehr als  $r$  derartige Vektoren  $e$  nicht existieren können. Entsprechend für  $s$ .

$r$  Vektoren von der gewünschten Art werden durch diejenigen  $r$  Grundvektoren  $e_i$  der Darstellung (14) zugrunde liegenden Koordinatensystems geliefert, denen die positiven Vorzeichen  $\varepsilon_i$  korrespondieren; die zu-

gehörigen Komponenten  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) sind bestimmte Linearformen von  $\mathfrak{x}$  [vergl. (16)]:  $x_i = L_i(\mathfrak{x})$ . Ist nun  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) irgend ein System von Vektoren, die wechselseitig zueinander orthogonal sind und der Bedingung  $Q(e_i) > 0$  genügen, und  $\mathfrak{x}$  ein zu diesen  $e_i$  orthogonaler Vektor, so können wir eine lineare Kombination

$$\mathfrak{y} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \mu \mathfrak{x}$$

mit nicht lauter verschwindenden Koeffizienten bestimmen, welche den  $r$  homogenen Gleichungen genügt

$$L_1(\mathfrak{y}) = 0, \quad \dots, \quad L_r(\mathfrak{y}) = 0.$$

Dann fällt, wie aus der Normaldarstellung hervorgeht,  $Q(\mathfrak{y})$  negativ aus, es sei denn, daß  $\mathfrak{y} = 0$  ist. Mittels der Formel

$$Q(\mathfrak{y}) - \{\lambda_1^2 Q(e_1) + \dots + \lambda_r^2 Q(e_r)\} = \mu^2 Q(\mathfrak{x})$$

folgt jetzt die Behauptung  $Q(\mathfrak{x}) < 0$ , außer für den Fall, daß  $\mathfrak{y} = 0$ ;  $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$  wird; dann aber muß nach Voraussetzung  $\mu \neq 0$ , also  $\mathfrak{x} = 0$  sein.

In der Relativitätstheorie wird der Fall einer quadratischen Form von einer negativen und  $n-1$  positiven Dimensionen von Bedeutung. Im dreidimensionalen Raum ist bei Benutzung affiner Koordinaten

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

die Gleichung eines Kegels mit der Spitze im Nullpunkt, der aus zwei durch das verschiedene Vorzeichen von  $x_1$  unterschiedenen Mänteln besteht, die nur im Nullpunkt miteinander zusammenhängen. Diese Trennung in zwei Mäntel liefert in der Relativitätstheorie den Gegensatz von Vergangenheit und Zukunft; wir wollen sie hier statt durch Kontinuitätsmerkmale auf elementarem Wege analytisch zu beschreiben versuchen. — Sei also  $Q$  eine nicht-ausgeartete quadratische Form von nur einer negativen Dimension. Wir wählen einen Vektor  $e$ , für welchen  $Q(e) = -1$  ist. Die von 0 verschiedenen Vektoren  $\mathfrak{x}$ , für welche  $Q(\mathfrak{x}) \leq 0$  ist, mögen »negative Vektoren« genannt werden. Nach dem eben geführten Beweis des Trägheitssatzes kann kein negativer Vektor der Gleichung  $Q(e\mathfrak{x}) = 0$  genügen. Sie zerfallen daher in zwei getrennte Klassen oder »Kegel« gemäß der Fallunterscheidung:  $Q(e\mathfrak{x}) < 0$  oder  $> 0$ ;  $e$  selbst gehört dem ersten, —  $e$  dem zweiten Kegel an. Ein negativer Vektor  $\mathfrak{x}$  liegt »im Innern« oder »auf dem Mantel« eines Kegels, je nachdem  $Q(\mathfrak{x}) < 0$  oder  $= 0$  ist. Um zu zeigen, daß die beiden Kegel unabhängig sind von der Wahl des Vektors  $e$ , muß man beweisen: Aus  $Q(e) = Q(e') = -1$  und  $Q(\mathfrak{x}) \leq 0$  folgt, daß das Vorzeichen von  $\frac{Q(e'\mathfrak{x})}{Q(e\mathfrak{x})}$  gleich dem von  $-Q(ee')$  ist.

Jeden Vektor  $\mathfrak{x}$  kann man in zwei Summanden zerlegen

$$\mathfrak{x} = x e + \mathfrak{x}^*$$

derart, daß der erste proportional, der zweite  $\mathfrak{x}^*$  orthogonal zu  $e$  ist. Man hat diesem Zwecke nur  $x = -Q(e\mathfrak{x})$  zu nehmen, und es wird dann

$$Q(\mathfrak{x}) = -x^2 + Q(\mathfrak{x}^*).$$

$Q(\mathfrak{x}^*)$  ist, wie wir wissen, notwendig  $\geq 0$ ; schreiben wir dafür  $Q^*$ , so zeigt die Gleichung

$$Q^* = x^2 + Q(\mathfrak{x}) = Q^2(e\mathfrak{x}) + Q(\mathfrak{x}),$$

daß  $Q^*$  eine quadratische Form von  $\mathfrak{x}$  ist (übrigens eine ausgeartete), die der identischen Ungleichung  $Q^*(\mathfrak{x}) \geq 0$  genügt. Wir haben jetzt

$$Q(x) = -x^2 + Q^*(x) \leq 0, \quad Q(e') = -e'^2 + Q^*(e') < 0.$$

$$\{x = -Q(x)\} \quad \{e' = -Q(e')\}$$

Aus der auf  $Q^*$  anwendbaren Ungleichung (12) folgt

$$\{Q^*(e'x)\}^2 \leq Q^*(e') \cdot Q^*(x) < e'^2 x^2;$$

mithin hat

$$-Q(e'x) = e'x - Q^*(e'x)$$

das Vorzeichen des ersten Summanden  $e'x$ .

Wir lenken zu dem uns gegenwärtig interessierenden Fall einer positiv-definiten metrischen Grundform zurück. Benutzen wir zur Darstellung einer kongruenten Abbildung ein Cartesisches Koordinatensystem, so werden die Transformationskoeffizienten  $\alpha_{ik}$  in Formel (5'), § 2 so beschaffen sein müssen, daß identisch in den  $\xi$  die Gleichung

$$\xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \dots + \xi_n'^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$$

besteht. Das liefert die »Orthogonalitätsbedingungen«

$$(17) \quad \sum_{r=1}^n \alpha_{ri} \alpha_{rj} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}.$$

Sie besagen, daß beim Übergang zur inversen Abbildung die Koeffizienten  $\alpha_{ik}$  sich in  $\alpha_{ki}$  verwandeln:

$$\xi_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \xi_k.$$

Daraus folgt noch, daß die Determinante  $\mathcal{A} = |\alpha_{ik}|$  einer kongruenten Abbildung mit der ihrer inversen identisch ist, und da ihr Produkt = 1 sein muß, demnach  $\mathcal{A} = \pm 1$  wird. (Das eine oder das andere Vorzeichen wird eintreten, je nachdem es sich um eigentliche oder spiegelbildliche Kongruenz handelt.)

Für die analytische Behandlung der metrischen Geometrie ergeben sich zwei Möglichkeiten. *Entweder* man unterwirft das zu benutzende affine Koordinatensystem keiner Einschränkung; dann gilt es, eine Theorie der Invarianz gegenüber beliebigen linearen Transformationen zu entwickeln, in welcher aber zum Unterschied von der affinen Geometrie ein für allemal eine bestimmte invariante quadratische Form, die metrische Grundform

$$Q(x) = \sum_{i,k=1}^n g_{ik} \xi_i \xi_k$$

als absolutes Datum zur Verfügung steht. *Oder* aber man benutzt von vornherein nur Cartesische Koordinatensysteme; dann handelt es sich um eine Theorie der Invarianz gegenüber orthogonalen Transformationen, d. h. solchen linearen Transformationen, deren Koeffizienten die Nebenbedingungen (17) erfüllen. Wir müssen hier, um spätere Verallgemeinerungen, die über die Euklidische Geometrie hinausführen, daran anknüpfen zu können, den ersten Weg einschlagen. Er erscheint auch algebraisch von vornherein als der einfachere, da es leichter sein wird, einen Über-

blick über diejenigen Ausdrücke zu gewinnen, die bei *allen* linearen Transformationen ungeändert bleiben, als über diejenigen, welche sich nur gegenüber den orthogonalen Transformationen invariant verhalten (einer Klasse von Transformationen, die durch nicht leicht zu beherrschende Nebenbedingungen eingeschränkt sind). Wir werden hier die Invariantentheorie, als »*Tensorrechnung*«, in solcher Gestalt entwickeln, daß sie uns die sachgemäße mathematische Fassung nicht nur der geometrischen, sondern auch aller physikalischen Gesetze ermöglicht.

### § 5. Tensoren.

Wir haben im vorhergehenden eine Verschiebung als Vektor bezeichnet. In der Kinematik, Mechanik und Physik gewinnt aber der Begriff »Vektor« eine allgemeinere Bedeutung; wir nennen so jede Größe, die nach Wahl einer bestimmten Maßeinheit eindeutig und ohne Willkür durch eine Verschiebung repräsentiert werden kann. Die Geschwindigkeit eines sich bewegendes Punktes ist ein geläufiges Beispiel aus der Kinematik. Auch die *Kraft* ist in diesem Sinne ein Vektor. In der neueren Physik ist aber statt der Kraft der Begriff der Arbeit, der Energie als der entscheidende in den Vordergrund getreten; daraus ergibt sich eine andere, wie wir heute glauben, dem Wesen der Kraft besser entsprechende Repräsentation derselben als durch eine Verschiebung. Eine gegebene Kraft leistet bei jeder (»virtuellen«) Verschiebung ihres Angriffspunktes eine gewisse *Arbeit*; diese Arbeit ist eine lineare Form der Verschiebung. Sind bei Benutzung eines bestimmten Koordinatensystems  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  die Komponenten der willkürlichen Verschiebung, so ist die Arbeit also

$$(18) \quad = p_1 \xi^1 + p_2 \xi^2 + p_3 \xi^3,$$

wo  $p_1, p_2, p_3$  Konstante sind, welche zur Charakterisierung der Kraft in dem gewählten Koordinatensystem dienen können; diese Zahlen nennen wir daher die »Komponenten der Kraft«. Gehen wir zu einem andern Koordinatensystem über, wobei sich die Komponenten der Verschiebung gemäß den Formeln

$$(19) \quad \xi^i = \sum_k \alpha_{ik} \bar{\xi}^k$$

transformieren, so bestimmen sich die Komponenten  $\bar{p}_i$  der Kraft im neuen Koordinatensystem aus der Forderung, daß identisch in den  $\bar{\xi}^i$

$$\sum_i p_i \xi^i = \sum_i \bar{p}_i \bar{\xi}^i$$

sein muß; das ergibt die Transformationsformeln

$$\bar{p}_i = \sum_k \alpha_{ki} p_k.$$

Die Kräfte bilden in dem Sinne ein dreidimensionales System von Vektoren, daß für sie die Vektoraxiome des § 2 gültig sind. Denn jede Kraft ist unabhängig vom Koordinatensystem dargestellt durch eine *Linie*

form (einer willkürlichen Verschiebung); Linearformen aber kann man addieren und mit einer Zahl multiplizieren. In den Ausdruck (18) der Arbeit gehen die Verschiebungskomponenten  $\xi$  und die Kraftkomponenten  $p$  in völlig symmetrischer Weise ein. Bisher haben wir die  $p$  als Konstante, die  $\xi$  als Variable betrachtet. Wir können jetzt aber auch umgekehrt die  $p$  variabel, die  $\xi$  konstant nehmen. Wie wir vorhin eine Kraft charakterisiert haben durch die Arbeit, welche sie bei einer willkürlichen Verschiebung leistet, charakterisieren wir jetzt eine gegebene Verschiebung durch die Arbeit, welche eine willkürliche Kraft bei dieser Verschiebung ihres Angriffspunktes leistet; sie ist eine lineare homogene Funktion der willkürlichen Kraft. Das Verhältnis von Kraft und Verschiebung ist ein durchaus wechselseitiges. Kenner der projektiven Geometrie werden bemerken, daß hier ein genaues Seitenstück vorliegt zu der Dualität von Punkt- und Ebenen-Koordinaten; nur spielen in der projektiven Geometrie allein die homogenen linearen *Gleichungen* eine Rolle, hier aber die homogenen linearen *Formen* selbst.

Um die vorliegenden Verhältnisse in ihrer natürlichen Symmetrie und unter Abstreifung der speziellen Dimensionszahl  $n = 3$  rein mathematisch darzustellen, werden wir also von *zwei* Reihen von Variablen

$$\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n \quad | \quad \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$$

ausgehen, die wir etwa nach der Art der Indizesbezeichnung als »obere« und »untere« Variable unterscheiden. Ein Wertsystem der oberen Variablen heißt eine »Verschiebung«, ein Wertsystem der unteren Variablen eine »Kraft«. Transformieren wir die oberen Variablen gemäß den Gleichungen (19), in denen die  $\alpha_{ik}$  irgendwelche Konstanten mit einer von 0 verschiedenen Determinante sind, gleichzeitig aber die unteren Variablen gemäß den Gleichungen

$$(20) \quad \bar{\xi}_i = \sum_k \alpha_{ki} \xi_k,$$

so wollen wir diesen Prozeß als eine »lineare Transformation« oder auch als den Übergang zu einem neuen Koordinatensystem bezeichnen — nach der Bedeutung, welche diesem Prozeß in den geometrischen und physikalischen Anwendungen zukommt. Bei einer solchen Transformation ist das Produkt von Kraft und Verschiebung, die »Arbeit«, invariant:

$$\sum_i \xi_i \bar{\xi}^i = \sum_i \bar{\xi}_i \xi^i.$$

Wir untersuchen jetzt Linearformen, Bilinearformen, Trilinearformen, ... dieser Variablen: sie heißen *Tensoren* 1., 2., 3., ... *Stufe* (oder vom *Range* 1, 2, 3, ...) und die Koeffizienten der Form die *Tensorkomponenten*. So ist z. B., wenn  $\xi^i, \eta^i$  zwei willkürliche Verschiebungen,  $\zeta_i$  eine willkürliche Kraft ist, die Form

$$\sum_{i, k, l} \alpha_{ikl}^l \xi^i \eta^k \zeta_l$$

ein Tensor 3. Stufe; seine Komponenten  $a_{ik}^l$  heißen *kovariant* in bezug auf die Indizes  $i, k$  (die mit den Verschiebungsvariablen verknüpft sind) und *kontravariant* in bezug auf den (mit den Kraftvariablen verknüpften) Index  $l$ . Indem wir auf unsere Trilinearform den Prozeß der linearen Transformation nach (19), (20) zur Anwendung bringen, erhalten wir denselben Ausdruck und die Komponenten  $\bar{a}_{ik}^l$  des Tensors im neuen, »überstrichenen« Koordinatensystem:

$$\sum_{i,k,l} \bar{a}_{ik}^l \bar{\xi}^i \bar{\eta}^k \bar{\zeta}^l = \sum_{i,k,l} a_{ik}^l \xi^i \eta^k \zeta^l.$$

In der Physik werden wir eine GröÙe z. B. einen kovarianten Tensor 2. Stufe nennen, wenn jeder Einzelwert dieser GröÙe (nach Wahl einer Maßeinheit) eindeutig und ohne Willkür, insbesondere unabhängig vom Koordinatensystem, eine Bilinearform zweier willkürlicher Verschiebungen bestimmt und wenn durch Angabe dieser Bilinearform der betr. Wert der GröÙe unter allen ihren möglichen Werten vollständig festgelegt ist. In diesem Sinne ist nach dem Obigen die Kräfte  $F(\xi, \eta)$  selber ein kovarianter, die Verschiebung ein kontravarianter Tensor 2. Stufe. — Tensoren 1. Stufe heißen *Vektoren* (das soll die endgültige Definition dieses Namens sein).

Wann eine Bilinearform  $F(\xi, \eta)$  zweier willkürlicher Verschiebungen  $\xi, \eta$  *nicht-augeartet*, wann sie *symmetrisch* heißt, ist bereits in § 3 erklärt worden. Wir nennen sie *schief-symmetrisch*, wenn  $F(\eta, \xi) = -F(\xi, \eta)$  ist; an den Koeffizienten  $a_{ik}$  gibt sich das durch das Bestehen der Gleichungen  $a_{ki} = -a_{ik}$  kund. Unter den »gemischten«, in bezug auf einen Index kovarianten, in bezug auf den andern kontravarianten Tensor 2. Stufe gibt es einen ausgezeichneten, die »Arbeit«:

$$\sum_i \xi^i \eta_i \quad (= \sum_i \bar{\xi}^i \bar{\eta}_i),$$

der in jedem Koordinatensystem die Komponenten

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

besitzt.

Einen wichtigen kovarianten Tensor 2. Stufe haben wir bereits bei der Grundlegung der metrischen Geometrie kennen gelernt, das skalare Produkt zweier willkürlicher Verschiebungen. Wir nennen ihn den *metrischen Fundamentaltensor*; er ist symmetrisch und nicht-augeartet. Auf seine Existenz beruht die Möglichkeit, eine Kraft, so wie wir den Begriff der Kraft gefaßt haben, durch eine Verschiebung zu repräsentieren. In der Physik tun wir dies in der üblichen Weise, so ist die Arbeit, welche die Kraft bei der virtuellen Verschiebung  $\xi$  leistet, gleich dem skalaren Produkt der Verschiebung  $\xi$  und derjenigen  $p$ , durch welche die Kraft dargestellt wird. Beziehen wir uns auf ein bestimmtes Koordinatensystem, in welchem der metrische Fundamentaltensor die Komponenten  $g_{ik}$  hat, so ist sie

$$= \sum_{i,k} g_{ik} \xi^i p^k.$$

Zwischen den Komponenten  $p^i$  der die Kraft darstellenden Verschiebung und den Größen  $p_i$ , die wir oben als Komponenten der Kraft eingeführt haben, besteht also der Zusammenhang

$$(21) \quad p_i = \sum_k g_{ik} p^k.$$

Man kann das Wesen der Metrik geradezu darin erblicken — wenn man sich nur davon frei macht, den Begriff »Geometrie« in einem allzu engen Sinne zu fassen —, daß zwischen Verschiebungen und Kräften eine solche umkehrbar-eindeutige Beziehung besteht, welche 1) *linear* ist [der Summe zweier Kräfte entspricht die Summe der korrespondierenden Verschiebungen, dem  $\lambda$ -fachen einer Kraft das  $\lambda$ -fache der entsprechenden Verschiebung] und 2) »*polaren*« Charakter trägt: das Produkt aus einer Kraft und einer Verschiebung (die Arbeit) ist gleich dem Produkt der korrespondierenden Verschiebung und Kraft (Symmetrie der  $g_{ik}$ ). —

Während die Ausführungen der vorigen Absätze nur affine Geometrie voraussetzten, treten somit im *metrischen Raum* folgende besondere Verhältnisse ein. Man kann jedes Wertsystem der oberen Variablen  $\xi^i$  in umkehrbar-eindeutiger Weise mit einem bestimmten Wertsystem der unteren Variablen *koppeln* durch die Gleichungen

$$(22) \quad \xi_i = \sum_k g_{ik} \xi^k.$$

Diese Koppelung hat invarianten Charakter. Nehmen wir nämlich eine zweite willkürliche Verschiebung  $\eta^i$  zu Hilfe, so gilt bei Übergang zu einem neuen Koordinatensystem

$$\sum_{ik} g_{ik} \xi^k \eta^i = \sum_{ik} \bar{g}_{ik} \bar{\xi}^k \bar{\eta}^i,$$

und wenn  $\xi_i$  ein beliebiges Wertsystem der unteren Variablen ist,

$$\sum \xi_i \eta^i = \sum \bar{\xi}_i \bar{\eta}^i.$$

Besteht demnach im ursprünglichen Koordinatensystem der Zusammenhang (22), so gelten im neuen die entsprechenden Gleichungen

$$\bar{\xi}_i = \sum_k \bar{g}_{ik} \bar{\xi}^k.$$

Die Koppelung ist eine umkehrbar-eindeutige, da wegen des Nicht-Verschwindens der Determinante  $|g_{ik}|$  die Gleichungen (22) eindeutig nach  $\xi^i$  aufgelöst werden können:

$$(23) \quad \xi^i = \sum_k g^{ik} \xi_k.$$

Aus der Symmetrie der  $g_{ik}$  folgt die Symmetrie der Koeffizienten  $g^{ik}$  der aufgelösten oder »inversen« Gleichungen (23). Indem wir in der metrischen Geometrie ein für allemal die Koppelung (22) zwischen den oberen und unteren Variablen einführen, behalten wir dort nur *eine* Reihe unabhängiger Variablen; doch bleibt uns jederzeit die freie Wahl, ob wir die oberen oder die unteren als unabhängige betrachten wollen.

Zufolge der Koppelung (22) gilt für eine beliebige Linearform eine Gleichung

$$(24) \quad \sum_i a_i \xi^i = \sum_i a^i \xi_i,$$

wo zwischen den Koeffizienten  $a_i$  und  $a^i$  der Zusammenhang

$$a_i = \sum_k g_{ki} a^k = \sum_k g_{ik} a^k$$

besteht. Die  $a_i$  hatten wir die kovarianten, die  $a^i$  die kontravarianten Komponenten eines Vektors genannt; das Statthaben der Gleichungen (24) aber werden wir naturgemäß so ausdrücken:  $a^i$  sind die kontravarianten Komponenten *desselben* Vektors, dessen kovariante Komponenten die  $a_i$  sind; denn es sind die Koeffizienten *derselben* Linearform, diese einmal als Funktion der oberen, einmal als Funktion der unteren Variablen geschrieben. Eine Verschiebung sowohl wie eine Kraft ist jetzt als ein Vektor zu bezeichnen. Die Verschiebung  $\xi$  hat die kontravarianten Komponenten  $\xi^i$  und die aus (22) sich ergebenden kovarianten  $\xi_i$ ; die Kraft  $p$  hat die kovarianten Komponenten  $p_i$  und die aus (21) durch Auflösung sich ergebenden kontravarianten  $p^i$ . — Bei einem Tensor höherer Stufe verhält sich die Sache genau entsprechend wie bei Vektoren. Für eine Bilinearform gelten, wenn die oberen und unteren Variablen ein für allemal durch (22) gekoppelt sind, Gleichungen

$$\sum_{ik} a_{ik} \xi^i \eta^k = \sum_{ik} a_i{}^k \xi^i \eta_k = \sum_{ik} a^i{}_k \xi_i \eta^k = \sum_{ik} a^{ik} \xi_i \eta_k.$$

Die hier auftretenden Größen  $a_{ik}$ ,  $a_i{}^k$ ,  $a^i{}_k$ ,  $a^{ik}$  sind die kovarianten, gemischten und kontravarianten Komponenten *eines und desselben* Tensors 2. Stufe. Wir treffen hinsichtlich der Bezeichnung für immer die Vereinbarung, daß wir die kovarianten, gemischten und kontravarianten Komponenten desselben Tensors mit dem gleichen Buchstaben bezeichnen und durch die Stellung des Index oben oder unten angeben, ob die Komponenten hinsichtlich dieses Index kontra- oder kovariant sind.

Für den Fundamentaltensor selbst gilt insbesondere

$$\sum g_{ik} \xi^i \eta^k = \sum \xi^i \eta_i = \sum \xi_i \eta^i = \sum g^{ik} \xi_i \eta_k;$$

die gemischten Komponenten dieses Tensors sind also  $g_i{}^k = \delta_i{}^k$ , die kontravarianten  $g^{ik} = g^{ik}$ . Die Koeffizienten des zu (22) inversen Gleichungssystems (23) werden demnach von den kontravarianten Komponenten  $g^{ik}$  des Fundamentaltensors gebildet, und wir werden sie daher in der Folge nicht mehr mit  $g^{ik}$ , sondern mit  $g^{ik}$  bezeichnen.

In einem *Cartesischen* Koordinatensystem, in welchem der Fundamentaltensor die Komponenten

$$g_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

hat, lauten die Koppelungsgleichungen (22) einfach:  $\xi_i = \xi^i$ . Beschränken wir uns auf den Gebrauch Cartesischer Koordinatensysteme, so brau

zwischen kovariant und kontravariant nicht unterschieden zu werden. — Es ist aber zu erwähnen, daß die bisher auseinandergesetzten Begriffe hinsichtlich des Fundamentaltensors  $g_{ik}$  nur voraussetzen, daß er symmetrisch und nicht-ausgeartet ist, während der Einführung eines Cartesischen Koordinatensystems der weitere Umstand zugrunde liegt, daß die korrespondierende quadratische Form positiv-definit ist. Das ist nicht gleichgültig. In der Relativitätstheorie tritt zu den drei Raumkoordinaten als vierte gleichberechtigt die Zeitkoordinate hinzu, und die Maßbestimmung, die in dieser vierdimensionalen Mannigfaltigkeit gilt, beruht nicht auf einer definiten, sondern einer indefiniten Form (Kap. III). In dieser Mannigfaltigkeit werden wir also, wenn wir uns auf reelle Koordinaten beschränken, kein Cartesisches Koordinatensystem einführen können; aber die hier entwickelten Begriffe, die auf die Dimensionenzahl  $n = 4$  zu spezialisieren sind, behalten ihre volle Anwendbarkeit.

In das System der Tensoren reihen sich die *Skalare* oder *Invarianten* — ein Skalar ist eine Größe, deren einzelner Wert nach Wahl einer bestimmten Maßeinheit durch eine vom Koordinatensystem unabhängige Zahl  $a$  gegeben werden kann; eine Zahl  $a$  also, die sich beim Übergang zu einem neuen Koordinatensystem gemäß der Gleichung  $a = \bar{a}$  transformiert — als Tensoren o. Stufe ein.

*Die geometrischen und physikalischen Größen sind Skalare, Vektoren und Tensoren: darin spricht sich die mathematische Beschaffenheit des Raumes aus, in welchem diese Größen existieren.* Die dadurch bedingte mathematische Symmetrie ist keineswegs auf die Geometrie beschränkt, sondern kommt im Gegenteil erst in der Physik recht zur Geltung: weil die Naturvorgänge in einem metrischen Raum sich abspielen, ist die Tensorrechnung das natürliche mathematische Instrument zum Ausdruck der Gesetzmäßigkeit, welche diese Vorgänge beherrscht.

### § 6. Tensoralgebra. Beispiele.

*Addition von Tensoren.* Durch Multiplikation einer Linearform, Bilinearform oder Trilinearform . . . mit einer Zahl, ebenso durch Addition zweier Linearformen oder zweier Bilinearformen . . . entsteht immer wiederum eine derartige Form. Vektoren und Tensoren kann man also mit einer Zahl (einem Skalar) multiplizieren und zwei oder auch mehrere Tensoren der gleichen Stufe addieren. Diese Operationen werden an den Komponenten durch Multiplikation mit der betr. Zahl, bzw. durch Addition ausgeführt. Im Gebiete der Tensoren jeder Stufe gibt es einen ausgezeichneten Tensor o, dessen sämtliche Komponenten verschwinden; zu einem beliebigen Tensor der gleichen Stufe addiert, ändert er diesen nicht. — Der Zustand eines physikalischen Systems wird durch die Angabe der Werte gewisser Skalare und Tensoren beschrieben; daß ein aus ihnen durch mathematische Operationen gebildeter invarianter (d. h. nur von ihnen, nicht aber von der Wahl des Koordinatensystems abhängiger) Tensor = o ist, darin besteht allgemein die Aussage eines Naturgesetzes.

*Beispiele.* Die Bewegung eines Punktes wird analytisch in der Weise dargestellt, daß man den Ort des beweglichen Punktes, bzw. dessen Koordinaten  $x_i$  als Funktionen der Zeit  $t$  angibt. Die Ableitungen  $\frac{dx_i}{dt}$  für einen bestimmten Moment  $t$  transformieren sich beim Übergang zu einem andern affinen Koordinatensystem so wie die Verschiebungskomponenten  $\xi^i$ ; sie sind also kontravariante Komponenten  $u^i$  eines Vektors »Geschwindigkeit«. Durch Multiplikation mit der Masse  $m$  des bewegten Punktes, einem Skalar, der die Trägheit der Materie zum Ausdruck bringt, erhält man den »Impuls« (oder »Bewegungsgröße«). Durch Addition der Impulse mehrerer Massenpunkte, bzw. aller derer, aus denen man sich in der Punktmechanik einen starren Körper zusammengesetzt denkt, erhält man den Gesamt-Impuls des Punktsystems oder des starren Körpers. Bei kontinuierlicher Massenausbreitung sind die Summen durch Integrale zu ersetzen. Das Grundgesetz der Bewegung lautet, wenn  $G^i$  die kontravarianten Komponenten des Impulses eines Massenpunktes,  $p^i$  die der Kraft sind:

$$(25) \quad \frac{dG^i}{dt} = p^i; \quad G^i = mu^i.$$

Da nach unserer Auffassung die Kraft von Hause aus ein kovarianter Vektor ist, ist dieses Grundgesetz nur in einem metrischen, nicht in einem rein affinen Raum möglich. Dasselbe Gesetz gilt für den Gesamtimpuls eines starren Körpers und die an ihm angreifende Gesamtkraft.

*Multiplikation von Tensoren.* Durch Multiplikation zweier Linearformen  $\sum_i a_i \xi^i$ ,  $\sum_i b_i \eta^i$ , die von zwei unabhängigen, willkürlichen Verschiebungen  $\xi$  und  $\eta$  abhängen, erhält man eine Bilinearform

$$\sum_{i,k} a_i b_k \xi^i \eta^k$$

und damit aus den beiden Vektoren  $a$  und  $b$  einen Tensor 2. Stufe

$$(26) \quad a_i b_k = c_{ik}.$$

Durch die Gleichung (26) wird ein invarianter Zusammenhang zwischen den Vektoren  $a$  und  $b$  und dem Tensor  $c$  dargestellt; d. h. bei Übergang zu einem neuen Koordinatensystem gelten für die (überstrichenen) Komponenten dieser Größen im neuen Koordinatensystem genau dieselben Gleichungen

$$\bar{a}_i \bar{b}_k = \bar{c}_{ik}.$$

In derselben Weise läßt sich z. B. die Multiplikation eines Tensors 1. Stufe mit einem Tensor 2. Stufe (allgemein eines Tensors beliebiger Stufe mit einem Tensor beliebiger Stufe) vollziehen; durch Multiplikation von

$$\sum_i a_i \xi^i \text{ mit } \sum_{i,k} b_i^k \eta^i \zeta_k,$$

worin die griechischen Buchstaben, je nachdem sie ihre Indizes oben

unters tragen, willkürliche Wertsysteme der oberen oder unteren Variablen bedeuten, entspringt die trilineare Form

$$\sum_{ikl} a_i b_k^l \xi^i \eta^k \zeta_l$$

und somit durch Multiplikation der beiden Tensoren 1. und 2. Stufe ein Tensor  $c$  der 3. Stufe:

$$a_i \cdot b_k^l = c_{ik}^l.$$

An den Komponenten ist diese Multiplikation also einfach dadurch auszuführen, daß jede Komponente des einen Tensors mit jeder Komponente des andern multipliziert wird; *die Indizes müssen dabei völlig getrennt gehalten werden.* Es ist noch zu beachten, daß beispielsweise die in bezug auf den Index  $l$  kovarianten Komponenten des soeben gebildeten Tensors 3. Stufe

$$c_{ik}^l = a_i b_k^l \text{ durch } c_{ikl} = a_i b_{kl}$$

gegeben sind. In solchen Multiplikationsformeln ist es also ohne weiteres gestattet, irgend einen Index auf beiden Seiten der Gleichung von unten nach oben oder von oben nach unten zu schaffen.

*Beispiele schiefssymmetrischer und symmetrischer Tensoren.* Aus zwei Vektoren mit den kontravarianten Komponenten  $a^i$ ,  $b^i$  entsteht durch Multiplikation in der einen und andern Reihenfolge und nachfolgende Subtraktion ein schiefssymmetrischer Tensor 2. Stufe  $c$  mit den kontravarianten Komponenten

$$c^{ik} = a^i b^k - a^k b^i.$$

In der gewöhnlichen Vektorrechnung tritt dieser Tensor auf als »vektorielles Produkt« der beiden Vektoren  $a$  und  $b$ . Zeichnet man im dreidimensionalen Raum einen bestimmten Schraubungssinn aus, so ist es nämlich möglich, eine einfache umkehrbar-eindeutige Korrespondenz zwischen diesen Tensoren und den Vektoren herzustellen, die es gestattet, den Tensor  $c$  durch einen Vektor zu repräsentieren. (Im vierdimensionalen Raum ist dies schon deshalb ausgeschlossen, weil dort ein schiefssymmetrischer Tensor 2. Stufe 6 unabhängige Komponenten besitzt, ein Vektor aber nur 4; ebenso in Räumen von noch höherer Dimensionszahl.) Für die Dimensionszahl 3 aber beruht die erwähnte Darstellung auf folgendem. Benutzen wir lediglich Cartesische Koordinatensysteme und führen neben  $a$  und  $b$  noch eine willkürliche Verschiebung  $\xi$  ein, so multipliziert sich beim Übergang von einem Cartesischen Koordinatensystem zu einem andern die Determinante

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \end{vmatrix} = c^{23} \xi^1 + c^{31} \xi^2 + c^{12} \xi^3$$

mit der Determinante der Transformationskoeffizienten. Für eine orthogonale Transformation ist aber diese Determinante  $= \pm 1$ . Beschränken

wir uns auf die »eentlichen« orthogonalen Transformationen, für welche diese Determinante  $= +1$  ist, so bleibt jene Linearform der  $\xi$  ungeändert; demgemäß ist durch die Formeln

$$c^{23} = c_1^*, \quad c^{31} = c_2^*, \quad c^{12} = c_3^*$$

mit dem schiefsymmetrischen Tensor  $c$  ein Vektor  $c^*$  in einer Weise verknüpft, die invariant ist gegenüber eigentlichen orthogonalen Transformationen. Der Vektor  $c^*$  ist senkrecht zu den beiden Vektoren  $a$  und  $b$ , und seine Größe ist (nach elementaren Formeln der analytischen Geometrie) gleich dem Flächeninhalt des von den Vektoren  $a$  und  $b$  aufgespannten Parallelogramms. — Die Ersetzung der schiefsymmetrischen Tensoren durch Vektoren in der üblichen Vektorrechnung mag im Interesse der Bezeichnungsökonomie gerechtfertigt sein. Sie verdeckt in mancher Hinsicht das Wesen der Sache und gibt z. B. in der Elektrodynamik zu den bertichtigten Schwimmregeln Anlaß, die keineswegs Ausdruck dafür sind, daß in dem Raum, in dem sich die elektrischen Vorgänge abspielen, ein ausgezeichneter Schraubungssinn herrscht, sondern nur notwendig werden, weil man die magnetische Kraftstärke als Vektor betrachtet, während sie in Wahrheit (wie das vektorielle Produkt zweier Vektoren) ein schiefsymmetrischer Tensor ist. Wäre uns eine Raumdimension mehr beschert, so hätte es niemals einem solchen Irrtum kommen können.

In der Mechanik tritt das schiefsymmetrische Tensorprodukt zweier Vektoren auf 1) als *Drehimpuls* (*Impulsmoment*) um einen Punkt  $O$ : Betrachtet man sich in  $P$  einen Massenpunkt und sind  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  die Komponenten des Ortsvektors  $\vec{OP}$ , ferner  $u^i$  die (kontravarianten) Komponenten der Geschwindigkeit jenes Punktes im betrachteten Moment,  $m$  seine Masse, so ist der Drehimpuls definiert durch

$$L^{ik} = m(u^i \xi^k - u^k \xi^i).$$

Der Drehimpuls eines starren Körpers um einen Punkt  $O$  ist die Summe der Drehimpulse der einzelnen Massenpunkte des Körpers zugehörigen Drehimpulse. 2) tritt es auf als *Drehmoment einer Kraft*. Greift diese im Punkte  $P$  an und sind  $p^i$  ihre kontravarianten Komponenten, so ist dasselbe definiert durch

$$q^{ik} = p^i \xi^k - p^k \xi^i.$$

Für einen Massenpunkt wie auch für einen frei beweglichen starren Körper gilt neben (25) das Gesetz

$$(27) \quad \frac{dL^{ik}}{dt} = q^{ik};$$

für Drehung eines starren Körpers um den festgehaltenen Punkt  $O$  allein das Dreh-Gesetz (27).

Ein weiteres Beispiel eines schiefsymmetrischen Tensors ist die *Drallgeschwindigkeit* eines starren Körpers um den festen Punkt  $O$ . Bei einer beliebigen Drehung gehe der Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $\xi^i$  (wobei

nutzen  $O$  als Nullpunkt) über in einen Punkt  $*P$  mit den Koordinaten  $*\xi^i$ ; es ist dann

$$*\xi^i = \sum_k \alpha_k^i \xi^k,$$

wo die  $\alpha_k^i$  konstante (vom Punkte  $P$  unabhängige) Koeffizienten sind. Für eine unendlichkleine Drehung gehe der Punkt  $(\xi^i)$  über in den Punkt mit den Koordinaten  $\xi^i + \delta \xi^i$ ; dann sind die  $\delta \xi^i$  lineare Funktionen der  $\xi^i$ :

$$(28) \quad \delta \xi^i = \sum_k v_k^i \xi^k.$$

Auch  $\delta \xi^i$  sind (wie  $\xi^i$ ) die (kontravarianten) Komponenten einer Verschiebung. Ist also  $\eta_i$  irgend ein Wertsystem der unteren Variablen, so ist

$$\sum_i \eta_i \delta \xi^i = \sum_{ik} v_k^i \eta_i \xi^k$$

eine Invariante;  $v_k^i$  sind mithin die Komponenten eines im Index  $k$  kovarianten, im Index  $i$  kontravarianten Tensors. Für eine Drehung muß

$$\delta \sum_{ik} g_{ik} \xi^i \xi^k = \delta \sum \xi^i \xi^i = 0$$

sein, und das liefert

$$\sum_i \xi^i \delta \xi^i = 0.$$

Setzen wir die Ausdrücke (28) ein, so kommt

$$\sum_{ik} v_k^i \xi^i \xi^k = \sum_{ik} v_{ik} \xi^i \xi^k = 0.$$

Das muß identisch in den Variablen  $\xi^i$  gelten, und daher ist

$$v_{ki} + v_{ik} = 0;$$

der Tensor mit den kovarianten Komponenten  $v_{ik}$  ist also schief-symmetrisch.

Bei der Bewegung eines starren Körpers erfährt der Körper während der unendlichkleinen Zeit  $\delta t$  eine unendlichkleine Drehung. Wir brauchen den eben gebildeten infinitesimalen Drehungstensor  $v$  nur durch  $\delta t$  zu dividieren, um (im Limes für  $\delta t = 0$ ) den schiefsymmetrischen Tensor »Winkelgeschwindigkeit« zu erhalten, den wir wiederum mit  $v$  bezeichnen wollen. Die Formeln (28) gehen dabei, wenn  $u^i$  die kontravarianten,  $u_i$  die kovarianten Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes  $P$  bedeuten, über in die Grundformel der Kinematik des starren Körpers:

$$(29) \quad u_i = \sum_k v_{ik} \xi^k.$$

Die Existenz der »momentanen Drehaxe« folgt aus dem Umstand, daß die linearen Gleichungen

$$\sum_k v_{ik} \xi^k = 0$$

mit den schiefsymmetrischen Koeffizienten  $v_{ik}$  im Falle  $n = 3$  stets

Lösungen besitzen, die von der trivialen  $\xi^1 = \xi^2 = \xi^3 = 0$  verschieden sind. — Auch die Winkelgeschwindigkeit pflegt meistens als ein Vektor dargestellt zu werden.

Endlich bietet das bei der Drehung eines Körpers auftretende *Trägheitsmoment* ein einfaches Beispiel für einen symmetrischen Tensor 2. Stufe. Ist der Nullpunkt  $O$  wieder der feste Drehpunkt und befindet sich im Punkte  $P$  mit den Koordinaten  $\xi^i$  ein Massenpunkt von der Masse  $m$ , so nennen wir den symmetrischen Tensor, dessen kontravariante Komponenten durch  $m\xi^i\xi^k$  gegeben sind (Multiplikation!), die »Rotationsträgheit« des Massenpunktes (für den Drehpunkt  $O$ ). Die Rotationsträgheit  $T^{ik}$  eines Punktsystems oder Körpers ist definiert als die Summe dieser für seine einzelnen Punkte  $P$  zu bildenden Tensoren. Die Definition weicht von der üblichen ab; sie ist aber die richtige, wenn man Ernst damit macht, die Rotationsgeschwindigkeit als einen schief-symmetrischen Tensor und nicht als einen Vektor aufzufassen (wie wir alsbald sehen werden). Für Drehung um  $O$  spielt der Tensor  $T^{ik}$  die gleiche Rolle wie der Skalar  $m$  für Translationsbewegung.

*Verjüngung.* Sind  $a_i^k$  die gemischten Komponenten eines Tensors 2. Stufe, so ist  $\sum_i a_i^i$  eine Invariante. Sind also  $\bar{a}_i^k$  die gemischten Komponenten desselben Tensors nach Übergang zu einem neuen Koordinatensystem, so ist

$$\sum_i a_i^i = \sum_i \bar{a}_i^i.$$

Beweis: Ist  $\xi^i$  ein willkürliches Wertsystem der oberen,  $\eta_i$  der unteren Variablen, so besteht die Gleichung

$$\sum_{ik} a_i^k \xi^i \eta_k = \sum_{ik} \bar{a}_i^k \bar{\xi}^i \bar{\eta}_k.$$

Ist  $\zeta_k^i$  ein willkürlicher in  $k$  kovarianter, in  $i$  kontravarianter Tensor, so drücken sich die Komponenten  $\bar{\zeta}_k^i$  im neuen Koordinatensystem in gewisser Weise linear durch die Komponenten  $\zeta_k^i$  im alten aus.  $\xi^i \eta_k$  ist ein spezieller solcher Tensor.

$$\sum_{ik} a_i^k \zeta_k^i - \sum_{ik} \bar{a}_i^k \bar{\zeta}_k^i$$

ist nach Einführung jener Ausdrücke eine gewisse Linearform der  $\zeta_k^i$  etwa  $= \sum \gamma_{ik} \zeta_k^i$ . Dieselbe verschwindet identisch in den  $\xi$  und  $\eta$ , wenn wir  $\zeta_k^i = \xi^i \eta_k$  einsetzen. Folglich sind alle ihre Koeffizienten Null, und es besteht allgemein die Gleichung

$$\sum_{ik} a_i^k \zeta_k^i = \sum_{ik} \bar{a}_i^k \bar{\zeta}_k^i.$$

Wählen wir darin für  $\zeta$  insbesondere den Tensor mit den Komponenten

$$\zeta_k^i = \delta_k^i = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases},$$

so ist auch  $\bar{\zeta}_k^i = \delta_k^i$ , und es kommt

$$\sum_i a_i^i = \sum_i \bar{a}_i^i.$$

Wir können aus diesem Satz sogleich eine allgemeine Rechenoperation für Tensoren, die »Verjüngung«, herleiten, die als zweite neben die Multiplikation tritt. Indem wir in den gemischten Komponenten eines Tensors einen bestimmten oberen mit einem bestimmten unteren Index zusammenfallen lassen und nach ihm summieren, erhalten wir aus dem gegebenen Tensor einen neuen, von einer um 2 geringeren Stufenzahl; z. B. aus den Komponenten  $a_{hik}^{lm}$  eines Tensors 5. Stufe die Komponenten

$$(30) \quad \sum_r a_{hir}^{lr} = c_{hi}^l$$

eines Tensors 3. Stufe. Der durch (30) dargestellte Zusammenhang ist invariant, d. h. drückt sich in der gleichen Weise nach dem Übergang zu einem neuen Koordinatensystem aus:

$$(31) \quad \sum_r \bar{a}_{hir}^{lr} = \bar{c}_{hi}^l.$$

Wir brauchen, um das einzusehen, nur zwei willkürliche Wertsysteme  $\xi_i, \eta^i$  der oberen, ein willkürliches Wertsystem  $\zeta_i$  der unteren Variablen zu wählen und unsern obigen Satz auf den Tensor 2. Stufe

$$\sum_{hil} a_{hik}^{lm} \xi^h \eta^i \zeta_l = f_k^m$$

anzuwenden. Definieren wir die  $c$  durch (30), die  $\bar{c}$  durch (31), so liefert die Gleichung

$$\sum_r f_r^r = \sum_r \bar{f}_r^r$$

dann die Formel

$$\sum_{hil} c_{hi}^l \xi^h \eta^i \zeta_l = \sum_{hil} \bar{c}_{hi}^l \bar{\xi}^h \bar{\eta}^i \bar{\zeta}_l.$$

Es sind also in der Tat  $\bar{c}_{hi}^l$  im neuen Koordinatensystem die Komponenten desselben Tensors 3. Stufe, dessen Komponenten im alten  $= c_{hi}^l$  sind.

*Beispiele* für diese Operation der Verjüngung sind uns im vorigen schon in Hülle und Fülle begegnet. Immer wo nach gewissen Indizes summiert wurde, trat in dem allgemeinen Summenglied der Summationsindex doppelt, einmal unten und einmal oben auf; jede solche Summation ist die Ausführung einer Verjüngung. So z. B. in Formel (29): aus  $v_{ik}$  und  $\xi^i$  kann man durch Multiplikation den Tensor 3. Stufe  $v_{ik} \xi^i$  bilden; indem man dann  $k$  mit  $l$  zusammenfallen läßt und über  $k$  summiert, ergibt sich der verjüngte Tensor 1. Stufe  $u_i$ . Der Prozeß der Verjüngung kann gleichzeitig für mehrere Indexpaare vorgenommen werden. Aus den Tensoren 1., 2., 3., ... Stufe mit den kovarianten Komponenten  $a_i, a_{ik}, a_{ikl}, \dots$  erhält man so insbesondere die Invarianten

$$\sum_i a_i a^i, \quad \sum_{ik} a_{ik} a^{ik}, \quad \sum_{ikl} a_{ikl} a^{ikl}, \quad \dots$$

Wenn, wie wir hier annehmen, die dem metrischen Grundtensor entsprechende quadratische Form positiv-definit ist, sind diese Invarianten alle positiv; denn in einem Cartesischen Koordinatensystem stellen sie sich direkt als die Quadratsummen der Komponenten dar. Die Quadratwurzel aus diesen Invarianten mag, wie im einfachsten Falle des Vektors als der *Betrag* oder die Größe des Tensors 1., 2., 3., ... Stufe bezeichnet werden.

Wir treffen jetzt und für alle Zukunft die Verabredung: wenn in einer mit Indizes behafteten Formelglied, das die Komponenten eines Tensors bedeutet, ein Index doppelt, oben und unten vorkommt, so ist stets gemeint, daß über ihn summiert werden soll, ohne daß wir es für nötig finden, ausdrücklich ein Summenzeichen davor zu setzen.

Die Operationen der Addition, Multiplikation und Verjüngung setzen nur die affine Geometrie voraus; ihnen liegt kein »metrischer Fundamentaltensor« zugrunde. Dies ist allein für den Prozeß des Übergangs von kovarianten zu kontravarianten Komponenten und seine Umkehrung der Fall.

*Die Eulerschen Kreisgleichungen.* Zur Einübung der Tensorrechnung wollen wir die Eulerschen Gleichungen der kräftefreien Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt  $O$  herleiten. Wir schreiben Grundgleichungen (27) kovariant:

$$\frac{dL_{ik}}{dt} = 0,$$

multiplizieren sie zur bequemerem Zusammenfassung mit den kontravarianten Komponenten  $w^{ik}$  eines beliebigen konstanten (von der Bewegung unabhängigen) schiefsymmetrischen Tensors und verjüngen in bezug auf  $i$  und  $k$ . Ist  $H_{ik}$  gleich der über alle Massenpunkte zu erstreckenden Summe

$$\sum_m m u_i \xi_k$$

gesetzt, so ist

$$\frac{1}{2} L_{ik} w^{ik} = H_{ik} w^{ik} = H$$

eine Invariante, und unsere Gleichungen können wir in die Formel einigen:

$$(32) \quad \frac{dH}{dt} = 0.$$

Führen wir die Ausdrücke (29) für  $u_i$  ein und den Trägheitstensor  $H_{ik}$  so wird

$$(33) \quad H_{ik} = v_{ir} T_{kr}.$$

Bisher haben wir angenommen, daß ein im Raume festes Koordinatensystem benutzt wird. Die Trägheitskomponenten  $T$  ändern sich dann mit der Massenverteilung im Laufe der Zeit. Benutzen wir aber statt dessen jetzt ein im Körper festes Koordinatensystem und verstehen unter dem bisherigen Zeichen die Komponenten der betreffenden Tensoren in bezug

dieses Koordinatensystem, kennzeichnen hingegen die Komponenten derselben Tensoren in bezug auf das raumfeste Koordinatensystem durch Überstreichen, so bleibt wegen der Invarianz von  $H$  die Gleichung (32) bestehen. Die  $T_i^k$  sind nunmehr Konstante; dafür sind aber die  $w^{ik}$  mit der Zeit variabel. Unsere Gleichung ergibt

$$(34) \quad \frac{dH_{ik}}{dt} \cdot w^{ik} + H_{ik} \cdot \frac{dw^{ik}}{dt} = 0.$$

Um  $\frac{dw^{ik}}{dt}$  zu bestimmen, wählen wir zwei willkürliche im Körper feste Vektoren, deren kovariante Komponenten im körperfesten Koordinatensystem  $= \xi_i$ , bzw.  $\eta_i$  sind. Diese Größen sind also Konstante, ihre Komponenten  $\bar{\xi}_i$ ,  $\bar{\eta}_i$  im raumfesten Koordinatensystem aber Funktionen der Zeit. Es ist

$$w^{ik} \xi_i \eta_k = \bar{w}^{ik} \bar{\xi}_i \bar{\eta}_k,$$

und daraus durch Differentiation nach der Zeit:

$$(35) \quad \frac{dw^{ik}}{dt} \cdot \xi_i \eta_k = \bar{w}^{ik} \left( \frac{d\bar{\xi}_i}{dt} \cdot \bar{\eta}_k + \bar{\xi}_i \cdot \frac{d\bar{\eta}_k}{dt} \right).$$

Nun ist nach Formel (29) z. B.

$$\frac{d\bar{\xi}_i}{dt} = \bar{v}_{ir} \bar{\xi}_r = \bar{v}_i^r \bar{\xi}_r.$$

Für die rechte Seite der Gleichung (35) bekommt man so

$$\bar{w}^{ik} (\bar{v}_i^r \bar{\xi}_r \bar{\eta}_k + \bar{v}_k^r \bar{\xi}_i \bar{\eta}_r),$$

und da hier eine Invariante steht, können wir die gestrichelten Komponenten wieder durch die ungestrichelten ersetzen:

$$\xi_i \eta_k \frac{dw^{ik}}{dt} = w^{ik} (\xi_r \eta_k v_i^r + \xi_i \eta_r v_k^r).$$

Dies gilt identisch in  $\xi$  und  $\eta$ ; also, wenn  $H_{ik}$  beliebige Zahlen sind,

$$H_{ik} \frac{dw^{ik}}{dt} = w^{ik} (v_i^r H_{rk} + v_k^r H_{ir}).$$

Nehmen wir darin für die  $H_{ik}$  insbesondere die vorher so bezeichneten Größen, so ist damit das zweite Glied in (34) bestimmt, und unsere Gleichung lautet

$$\left\{ \frac{dH_{ik}}{dt} + (v_i^r H_{rk} + v_k^r H_{ir}) \right\} w^{ik} = 0$$

identisch in dem schiefsymmetrischen Tensor  $w^{ik}$ ; daher

$$\frac{d(H_{ik} - H_{ki})}{dt} + \left\{ \begin{array}{l} v_i^r H_{rk} + v_k^r H_{ir} \\ - v_k^r H_{ri} - v_i^r H_{kr} \end{array} \right\} = 0.$$

Man führe den Ausdruck (33) für  $H_{ik}$  ein; da wegen der Symmetrie von  $T_{ik}$  auch

$$v_k^r H_{ir} = v_k^r v_i^s T_{rs}$$

symmetrisch ist in  $i$  und  $k$ , zerstören sich die beiden hinteren Glieder der in der geschweiften Klammer stehenden Summe. Setzt man den symmetrischen Tensor

$$v_i^r v_{kr} = g_{rs} v_i^r v_k^s = v v_{ik},$$

so lauten unsere Gleichungen schließlich

$$\frac{d}{dt}(v_{ir} T_k^r - v_{kr} T_i^r) = (v v_{ir} T_k^r - v v_{kr} T_i^r).$$

Es ist bekanntlich möglich, ein Cartesisches Koordinatensystem, bestehend aus den »Hauptträgheitsachsen«, einzuführen, so daß darin

$$g_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \quad \text{und} \quad T_{ik} = 0 \quad (\text{für } i \neq k)$$

ist. Schreiben wir dann  $T_i$  anstelle von  $T_i^i$ , analog für die übrigen Indizes, so gewinnen in diesem Koordinatensystem unsere Gleichungen die einfache Gestalt

$$(T_i + T_k) \frac{dv_{ik}}{dt} = (T_k - T_i) v v_{ik}.$$

Das sind die Differentialgleichungen für die Komponenten  $v_{ik}$  der un- bekannten Winkelgeschwindigkeit — Gleichungen, die sich bekanntlich durch elliptische Funktionen von  $t$  lösen lassen. Die hier auftretenden Hauptträgheitsmomente  $T_i$  hängen mit den sich nach den üblichen Definitionen ergebenden  $T_i^*$  durch die Gleichungen zusammen

$$T_1^* = T_2 + T_3, \quad T_2^* = T_3 + T_1, \quad T_3^* = T_1 + T_2.$$

Die von uns gegebene Behandlung des Rotationsproblems läßt sich im Gegensatz zu der üblichen Wort für Wort von dem dreidimensionalen auf mehrdimensionale Räume übertragen. Das ist ja freilich in prinzipiell völlig belanglos. Aber erst die Befreiung von der Beschränkung auf eine bestimmte Dimensionszahl, die Formulierung der Naturgesetze in solcher Gestalt, daß ihnen gegenüber die Dimensionszahl als etwas Zufälliges erscheint, bürgt uns dafür, daß ihre mathematische Durchdringung vollständig gelungen ist. —

Das Eindringen in den Tensorkalkül hat — abgesehen von der Abwesenheit von Indizes, die überwunden werden muß — gewiß seine begrifflichen Schwierigkeiten. Formal ist aber die Rechenmethodik von der äußersten Einfachheit, viel einfacher z. B. als der Apparat der elementaren Vektorrechnung. Zwei Operationen: Multiplikation und Verjüngung: Neben einanderschreiben der Komponenten zweier Tensoren mit lauter verschiedenen Indizes — Identifizierung zweier Indizes oben und unten — dann (stillschweigend) Summation nach ihm. Es ist vielfach versucht worden, in unserm Gebiet eine solche invariante, mit den Tensoren selbst und nicht mit ihren Komponenten arbeitende Bezeichnungsweise aufzubauen, wie sie in der Vektorrechnung besteht. Was aber dort am Platze ist, erweist sich für den viel weiter gespannten Rahmen des Tensorkalküls als äußerst unzumutbar. Es werden eine solche Fülle von Notationen

Bezeichnungen und ein solcher Apparat von Rechenregeln nötig (wenn man nicht doch immer wieder auf die Komponenten zurückgreifen will), daß damit ein Gewinn von sehr erheblichem negativen Betrag erreicht wird. Man muß gegen diese Orgien des Formalismus, mit dem man heute sogar die Techniker zu belästigen beginnt, nachdrücklich protestieren.

### § 7. Feinere Systematik der Tensoren.

Aus den Beispielen des vorigen Paragraphen geht mit aller Deutlichkeit hervor, daß die symmetrischen und die schiefsymmetrischen Tensoren 2. Stufe, wo sie in den Anwendungen auftreten, völlig verschiedene Größenarten darstellen. Dies wird uns zum Anlaß, im Gebiet der Tensoren eine feinere sachgemäße Systematik durchzuführen, die so heterogene Dinge nicht mehr in einen Topf wirft.

Ein Tensor 2. Stufe ist allgemein repräsentiert durch eine Bilinearform

$$F(\xi \eta) = \sum_{ik} a_{ik} \xi^i \eta^k$$

zweier willkürlicher Verschiebungen mit den Komponenten  $\xi^i$ ,  $\eta^i$ . Aus jeder Bilinearform  $F(\xi \eta)$  können wir die zugehörige quadratische Form  $F(\xi \xi)$  bilden; in dieser Weise geht, wie wir wissen, jede quadratische Form aus einer und nur einer symmetrischen Bilinearform hervor. Ein symmetrischer Tensor 2. Stufe kann also durch die zugehörige quadratische Form eindeutig dargestellt werden. Indem wir uns von vornherein auf den Standpunkt der metrischen Geometrie stellen und die »oberen« Variablen  $\xi^i$  als unabhängige nehmen, werden wir so unter Einschränkung des Namens »Tensor« auf jene Größen, die bisher unter der Bezeichnung »symmetrische Tensoren« auftraten, zu folgender Erklärung geführt.

*Unter einem Tensor 1., 2., 3., ... Stufe verstehen wir eine lineare, quadratische, kubische, ... Form (homogene Funktion) einer willkürlichen Verschiebung.*

Stellen wir bei Benutzung eines bestimmten Koordinatensystems die willkürliche Verschiebung dar durch ihre Komponenten  $\xi^i$ , so erscheint in diesem Koordinatensystem ein Tensor 3. Stufe z. B. als eine kubische Form der  $n$  Variablen  $\xi^i$ :

$$\sum_{ikl} a_{ikl} \xi^i \xi^k \xi^l;$$

diese Schreibweise wird aber erst dadurch zu einer eindeutig bestimmten, daß wir an die Koeffizienten  $a_{ikl}$  die »Symmetrie«-Bedingung stellen: Koeffizienten, welche Indextripeln  $ikl$  zugehören, die durch Vertauschung auseinander hervorgehen, sind gleich. Die solchergestalt normierten Koeffizienten bezeichnen wir als die »Komponenten« des durch die kubische Form repräsentierten Tensors. Beim Übergang zu einem neuen, durch Überstreichungen gekennzeichneten Koordinatensystem, der sich als eine lineare Transformation der Variablen  $\xi^i$  darstellt, gilt

$$(36) \quad \sum_{ikl} a_{ikl} \xi^i \xi^k \xi^l = \sum_{\bar{ikl}} \bar{a}_{\bar{ikl}} \bar{\xi}^{\bar{i}} \bar{\xi}^{\bar{k}} \bar{\xi}^{\bar{l}},$$

wobei natürlich die Komponenten  $\bar{a}_{ikl}$  im neuen Koordinatensystem wiederum der normierenden Bedingung der Symmetrie unterliegen.

Um die Übereinstimmung mit unseren früheren Begriffen zu beweisen müssen wir zeigen: Sind  $\xi^i, \eta^i, \zeta^i$  drei Reihen von Variablen, die alle der gleichen linearen Transformation unterworfen werden, so ist mit den obigen Bezeichnungen

$$(37) \quad \sum_{ikl} a_{ikl} \xi^i \eta^k \zeta^l = \sum_{ikl} \bar{a}_{ikl} \bar{\xi}^i \bar{\eta}^k \bar{\zeta}^l.$$

In der Tat: *definieren* wir die Zahlen  $\bar{a}_{ikl}$  durch (37) und bezeichnen die links stehende Trilinearform mit  $F(\xi \eta \zeta)$ , die rechts stehende mit  $\bar{F}(\bar{\xi} \bar{\eta} \bar{\zeta})$ , so folgt aus der Symmetrie der Koeffizienten  $a_{ikl}$  die Symmetrie von  $F$ , d. h. die Tatsache, daß sich die Funktion  $F(\xi \eta \zeta)$  bei einer Vertauschung der drei Argumentreihen  $\xi, \eta, \zeta$  nicht ändert. Daraus ergibt sich die gleiche Symmetrieeigenschaft für die Funktion  $\bar{F}(\bar{\xi} \bar{\eta} \bar{\zeta})$  und daraus wiederum die Symmetrie des Koeffizientensystems  $\bar{a}_{ikl}$ . Die  $\bar{a}_{ikl}$  genügen demnach der Symmetriebedingung und außerdem, wie aus (37) durch die Spezialisierung  $\bar{\xi}^i = \eta^i = \zeta^i$  hervorgeht, der in  $\xi$  identischen Gleichung (3). Das war unsere Behauptung. — Man beachte, daß vom gegenwärtigen Standpunkt aus gar kein Grund vorliegt, den Größen, die wir jetzt einem engeren Sinne Tensoren genannt haben, das Beiwort »symmetrisch« zu geben; nicht die Tensoren sind symmetrisch, sondern lediglich in der eindeutigen Festlegung der Komponenten geht eine normierende Symmetriebedingung ein.

Durch die Komponenten  $\xi^i$  einer Verschiebung wird die Richtung einer Geraden samt Richtungssinn und Größe festgelegt. Sind  $\xi^i, \eta^i$  irgend zwei voneinander linear unabhängige Verschiebungen, so wird von ihnen wenn man sie von einem beliebigen Punkt  $O$  aufträgt, eine Ebene aufgespannt. Die Größen

$$\xi^i \eta^k - \xi^k \eta^i = \xi^{ik}$$

bestimmen durch ihr Verhältnis in der gleichen Weise die »Stellung« dieser Ebene (eine »Flächenrichtung«), wie die  $\xi^i$  durch ihr Verhältnis die Richtung einer Geraden (eine »Linienrichtung«) bestimmen. Die  $\xi^{ik}$  sind dann und nur dann alle  $= 0$ , wenn die beiden Verschiebungen  $\xi^i, \eta^i$  linear abhängig sind und also keine zweidimensionale Mannigfaltigkeit aufspannen. Mit zwei linear unabhängigen Verschiebungen  $\xi$  und  $\eta$  ist in der aufgespannten Ebene ein Drehungssinn verknüpft: Der Sinn derjenigen Drehung in der Ebene um  $O$ , welche die Richtung von  $\xi$  durch einen Winkel  $< 180^\circ$  in die Richtung von  $\eta$  überführt; und außerdem eine bestimmte Maßzahl (Größe), nämlich der Flächeninhalt des von  $\xi$  und  $\eta$  aufgespannten Parallelogramms. Trägt man zwei Verschiebungen  $\xi, \eta$  von einem beliebigen Punkt  $O$ , zwei Verschiebungen  $\bar{\xi}, \bar{\eta}$  von einem beliebigen Punkt  $O_*$  ab, so sind diese dem einen und dem andern Paar zugehörigen Dinge: Ebenenstellung, Drehsinn und Größe

dann und nur dann miteinander identisch, wenn die  $\xi^{ik}$  des einen und andern Paares miteinander übereinstimmen:

$$\xi^i \eta^k - \xi^k \eta^i = \xi_{*}^i \eta_{*}^k - \xi_{*}^k \eta_{*}^i.$$

Wie also die  $\xi^i$  die Richtung einer Geraden samt Richtungssinn und Größe bestimmen, so die  $\xi^{ik}$  die Stellung einer Ebene samt Umlaufssinn und Größe; man sieht die volle Analogie.

Wie wir vorhin lineare, quadratische, kubische, ... Formen der  $\xi^i$  betrachteten, so werden wir jetzt lineare, quadratische, kubische, ... Formen der  $\xi^{ik}$  untersuchen; auch diese bezeichnen wir als Tensoren 1., 2., 3., ... Stufe; zur Unterscheidung nennen wir die ersteren aus einem ohne weiteres ersichtlichen Grunde »Linientensoren«, die neuen »Flächentensoren«. Für die  $\xi^{ik}$  gilt die Gleichung

$$(38) \quad \xi^{ki} = -\xi^{ik}.$$

Eine *Linearform* der  $\xi^{ik}$  läßt sich auf eine und nur eine Weise folgendermaßen darstellen:

$$(39) \quad \frac{1}{2} \sum_{ik} a_{ik} \xi^{ik} = \frac{1}{2} \sum_{ik} a_{ik} (\xi^i \eta^k - \xi^k \eta^i),$$

wenn man postuliert, daß die Koeffizienten  $a_{ik}$  der Bedingung

$$(40) \quad a_{ki} = -a_{ik}$$

genügen. Die so normierten Koeffizienten bezeichnen wir als die Komponenten des Flächentensors 1. Stufe. Bei dieser Annahme ist (39)

$$= \sum_{ik} a_{ik} \xi^i \eta^k.$$

In unserer alten Terminologie haben wir es also mit einem schief-symmetrischen Tensor 2. Stufe zu tun. Wir sehen, wie dieser bei unserem jetzigen Standpunkt in eine ganz andere Größenkategorie eintritt wie der »symmetrische«.

Bei der Normierung der Koeffizienten einer *quadratischen* Form der Flächenvariablen  $\xi^{ik}$ :

$$(41) \quad \frac{1}{4} \sum_{ij, hk} a_{ij, hk} \xi^{ij} \xi^{hk} = J$$

wird man zunächst dafür Sorge tragen können, daß das Koeffizientensystem symmetrisch ist in den Indexpaaren  $ij$  und  $hk$ , schief-symmetrisch in den beiden Indizes  $i$  und  $j$ , ebenso schief-symmetrisch in den beiden Indizes  $h$  und  $k$ :

$$(42') \quad a_{ij, hk} = a_{hk, ij};$$

$$(42'') \quad a_{ji, hk} = -a_{ij, hk}, \quad a_{ij, kh} = -a_{ij, hk}.$$

Die Form (41) ist dann

$$= \sum a_{ij, hk} \xi^i \eta^j \xi^h \eta^k,$$

und die Quadrilinearform

$$\sum a_{ij,hk} \xi_i^i \xi_j^j \xi_h^h \xi_k^k = F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4),$$

mit der die gegebene durch die Gleichung

$$(43) \quad J = F(\xi \eta \xi \eta)$$

zusammenhängt, hat die Eigenschaften:

$$(44') \quad F(\xi_3 \xi_4 \xi_1 \xi_2) = F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4);$$

$$(44'') \quad F(\xi_2 \xi_1 \xi_3 \xi_4) = F(\xi_1 \xi_2 \xi_4 \xi_3) = -F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4),$$

welche den Koeffizientenrelationen (42'), (42'') entsprechen. Damit die Normierung aber noch nicht abgeschlossen. Bilden wir nämlich die zyklische Vertauschung der letzten drei Argumente und Addition

$$F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) + F(\xi_1 \xi_3 \xi_4 \xi_2) + F(\xi_1 \xi_4 \xi_2 \xi_3) = S(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4),$$

so wird, wie aus (44'') sofort hervorgeht,  $S(\xi \eta \xi \eta) = 0$ . Außerdem erfüllt  $S$ , anstelle von  $F$  gesetzt, gleichfalls die Beziehungen (44'), (44''). Also kann man  $F$  durch Subtraktion irgend eines konstanten Multiplikators von  $S$  noch abändern, ohne daß die Beziehungen (43), (44'), (44'') gestört werden. Subtrahiert man insbesondere  $\frac{1}{3}S$ , so erfüllt das modifizierte  $F$  außerdem noch die Gleichung

$$(44''') \quad F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) + F(\xi_1 \xi_3 \xi_4 \xi_2) + F(\xi_1 \xi_4 \xi_2 \xi_3) = 0$$

oder ihre Koeffizienten:

$$(42''') \quad a_{ij,hk} + a_{ih,kj} + a_{ik,jh} = 0.$$

Damit sind wir aber am Ziel; d. h. jeder quadratischen Form  $J$  in vier Flächenvariablen entspricht eine und nur eine den sämtlichen Identitäten (44) genügende Quadrilinearform  $F$ , aus der  $J$  durch die Substitution

$$(45) \quad \xi_1 = \xi_3 = \xi, \quad \xi_2 = \xi_4 = \eta$$

— Gl. (43) — hervorgeht. Um dies zu zeigen, ist lediglich darzulegen, daß eine den erwähnten Identitäten genügende Quadrilinearform  $F$  identisch verschwindet, wenn  $F(\xi \eta \xi \eta) = 0$  ist. Nun ist aber

$$(46) \quad F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) + F(\xi_1 \xi_4 \xi_3 \xi_2)$$

unter jenen Umständen eine *symmetrische* Bilinearform in  $\xi_1$  und  $\xi_2$  und ebenso eine *symmetrische* Bilinearform in  $\xi_3$  und  $\xi_4$ , die verschwindet, wenn  $\xi_1 = \xi_3$ ,  $\xi_2 = \xi_4$  genommen wird. Zuzufolge des Satzes, daß eine *symmetrische* Bilinearform, deren zugehörige quadratische Form identisch verschwindet, ergibt sich daraus, daß (46)  $= 0$ . Benutzen wir noch (44''), so haben wir damit die Gleichung

$$F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) = F(\xi_1 \xi_4 \xi_3 \xi_2)$$

gewonnen, und durch zyklische Vertauschung von  $\xi_2 \xi_3 \xi_4$  infolgedessen auch

$$F(\xi_1 \xi_4 \xi_3 \xi_2) = F(\xi_1 \xi_3 \xi_4 \xi_2).$$

Die drei Summanden in (44''') sind somit einander gleich, und die Formel liefert das behauptete Resultat  $F = 0$ . — Unter den Te

im allgemeinen Sinne des § 5 ist also der Flächentensor 2. Stufe als ein Tensor 4. Stufe vertreten, für welchen die ihn darstellende Quadrilinearform den Bedingungen (44) genügt, oder dessen Komponenten  $a_{ij,kl}$  die gegenüber linearen Transformationen invarianten Gleichungen (42) erfüllen.

Berücksichtigt man die Beziehungen (44'), (44''), so ist in der Gleichung (44''') der Index 1 nur scheinbar ausgezeichnet. Andererseits kann bewiesen werden — und wir haben später von dieser Bemerkung<sup>5)</sup> Gebrauch zu machen —, daß die Relationen (44''), (44''') als normierende bereits genügen, da (44') eine Folge aus ihnen ist. Wird (44') nicht vorausgesetzt, so gehen dadurch, daß wir der Reihe nach den Indizes 2, 3, 4 die besondere Rolle zuweisen, welche alsdann der Index 1 in der Gleichung (44''') spielt, aus ihr noch drei weitere hervor. Indem man alle vier Gleichungen addiert und von (44'') durchgängigen Gebrauch macht, kommt

$${}_2[F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) - F(\xi_3 \xi_4 \xi_1 \xi_2)] = 0.$$

Ist  $Q$ , wie früher, die metrische Fundamentalform, so ist das einfachste Beispiel einer den Bedingungen (44) genügenden Quadrilinearform

$$\begin{vmatrix} Q(\xi_1 \xi_3) & Q(\xi_1 \xi_4) \\ Q(\xi_2 \xi_3) & Q(\xi_2 \xi_4) \end{vmatrix}.$$

Die aus ihr durch die Substitution (45) hervorgehende quadratische Form der Flächenvariablen  $\xi^{ik} = \xi^i \eta^k - \xi^k \eta^i$ :

$$J = Q(\xi) \cdot Q(\eta) - Q^2(\xi \eta)$$

bedeutet nach den Lehren der analytischen Geometrie nichts anderes als den ins Quadrat erhobenen Flächeninhalt des von den Vektoren  $\xi$  und  $\eta$  aufgespannten Parallelogramms. Die Wurzel aus  $J$  ist also jene »Größe«, die nach unsern obigen Ausführungen neben einer Ebenenstellung mit Umlaufssinn durch die  $\xi^{ik}$  festgelegt wird. Es ist

$$\begin{aligned} J &= \xi^i \xi_i \cdot \eta^k \eta_k - \xi_i \eta^i \cdot \xi^k \eta_k \\ (47) \quad &= (\xi^i \eta^k - \xi^k \eta^i) \xi_i \eta_k = \frac{1}{2} (\xi^i \eta^k - \xi^k \eta^i) (\xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i) \\ &= \frac{1}{2} \xi^{ik} \xi_{ik}. \end{aligned}$$

Auf eine genauere Diskussion der Flächentensoren 3. und höherer Stufe können wir verzichten, da solche in den Anwendungen des Tensorkalküls, die wir zu machen haben, nirgendwo auftreten.

Im  $n$ -dimensionalen Raum gibt es genau  $n$  linear unabhängige Linientensoren 1. Stufe (Vektoren), aus denen sich alle andern zusammensetzen lassen,  $\frac{n(n+1)}{2}$  derartige Linientensoren 2. Stufe und  $\frac{n(n-1)}{2}$  linear unabhängige Flächentensoren 1. Stufe. Die Maximalzahl der unabhängigen Flächentensoren 2. Stufe berechnet sich, wie wir hier ohne Beweis erwähnen, zu

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Nach den Linien- und Flächentensoren gehen wir jetzt zu den »Raumtensoren« über. Das sind lineare, quadratische, kubische, ... homogene Formen der »Raumvariablen«

$$\xi^{ikl} = \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^k & \xi^l \\ \eta^i & \eta^k & \eta^l \\ \zeta^i & \zeta^k & \zeta^l \end{vmatrix},$$

die aus drei willkürlichen Verschiebungen  $\xi, \eta, \zeta$  gebildet sind. Die  $\xi^{ikl}$  haben die Eigenschaft, bei einer geraden Vertauschung der Indizes in sich überzugehen, bei einer ungeraden in ihr Negatives —  $\xi^{ikl}$  umzu- schlagen. Eine Linearform der  $\xi^{ikl}$  läßt sich in einer und nur einer Weise so darstellen

$$\frac{1}{3!} \sum_{ikl} a_{ikl} \xi^{ikl},$$

daß die Koeffizienten diesen selben Bedingungen genügen; die so normierten Koeffizienten werden als die Komponenten des betr. Raumtensors

1. Stufe zu bezeichnen sein. Es gibt im ganzen  $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$  lineare unabhängige Raumtensoren 1. Stufe; im Falle  $n=3$  nur einen einzigen. In der Tat ist dann  $a_{123}$  die einzige unabhängige Komponente, die andere bestimmen sich aus

$$a_{123} = a_{231} = a_{312} = -a_{213} = -a_{321} = -a_{132}.$$

Der Invariante (47) entspricht hier

$$(48) \quad \frac{1}{3!} \sum_{ikl} \xi_{ikl} \xi^{ikl};$$

diese Zahl werden wir als das Quadrat des Volumens des von den Verschiebungen  $\xi, \eta, \zeta$  aufgespannten Parallelepipeds zu bezeichnen. Im Falle des dreidimensionalen Raums ist sie offenbar

$$= \xi_{123} \xi^{123} = g_{11} g_{22} g_{33} \xi^{123} \xi^{123},$$

und da  $\xi^{ikl} = \pm \xi^{123}$  ist, je nachdem  $ikl$  eine gerade oder ungerade Vertauschung von 123 ist, so bekommt sie den Wert

$$g \cdot (\xi^{123})^2,$$

wo  $g$  die Determinante der Koeffizienten  $g_{ik}$  der metrischen Fundamentform ist. Das Volumen des Parallelepipeds wird somit

$$= \sqrt{g} \cdot \text{abs.} \begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 \\ \zeta^1 & \zeta^2 & \zeta^3 \end{vmatrix}.$$

Das befindet sich in Übereinstimmung mit elementaren Formeln der analytischen Geometrie.

Im dreidimensionalen Raum ist unsere Systematik mit den Raumtensoren beendet, im vier- oder mehrdimensionalen Raum aber setzt sie sich entsprechend fort.

Damit sind wir zu einer wahrhaft der Sache gemäßen Übersicht und Einteilung der in der räumlichen Wirklichkeit eine Rolle spielenden Größenarten gelangt. Es kann aus guten inneren Gründen behauptet werden, und wir werden es in der Folge durchweg bestätigt finden, daß nur solche Größen eine reale Bedeutung haben, die in diesem natürlichen System ihren Platz finden. Man beachte, daß unsere jetzige Klassifikation bei weitem nicht alle jene Größen umfaßt, die wir in den beiden vorigen Paragraphen als Tensoren bezeichnet haben; z. B. sind von den Tensoren 2. Stufe in jenem weiteren Sinne hier nur die symmetrischen (als Linientensoren 2. Stufe) und die schiefsymmetrischen (als Flächentensoren 1. Stufe) vertreten. Für die Algebra werden wir nach wie vor jenen allgemeineren Tensorbegriff benutzen, da auf ihm die große Einfachheit des Kalküls beruht; das hat dann zur Folge, daß in den Zwischenrechnungen auch die Komponenten solcher Tensoren auftreten, die in unserm natürlichen System keine Stelle haben.

Als einfachste Beispiele der algebraischen Erzeugung von Tensoren aus Tensoren in unserm jetzigen engeren Sinne seien diese angeführt: 1) Sind  $a_i, b_i$  die kovarianten Komponenten zweier Linientensoren 1. Stufe, so sind

$$a_i b_k - a_k b_i = c_{ik}$$

die kovarianten Komponenten eines Flächentensors 1. Stufe, der durch dieses Bildungsgesetz mit den beiden gegebenen Linientensoren in einen vom benutzten Koordinatensystem unabhängigen Zusammenhang gebracht ist (sog. »vektorielles«, richtiger »flächentensorielles« Produkt). 2) Sind  $a_i$  die kovarianten Komponenten eines Linientensors 1. Stufe,  $b_{ik}$  die eines Flächentensors 1. Stufe, so bilden wir

$$(49) \quad a_i b_{kl} + a_k b_{li} + a_l b_{ik} = c_{ikl}.$$

Jedes einzelne Glied der links stehenden dreigliedrigen Summe ist die kovariante  $(ikl)^{\text{te}}$  Komponente eines aus  $a$  und  $b$  invariant entstehenden Tensors 3. Stufe im weiteren Sinne. Die  $c_{ikl}$  haben aber dazu die Eigenschaft, bei gerader Vertauschung der  $ikl$  in sich überzugehen, bei ungerader Vertauschung in ihr Negatives umzuschlagen. Folglich sind sie die kovarianten Komponenten eines Raumtensors 1. Stufe, der durch die Formeln (49) in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise aus dem Linien- und Flächentensor 1. Stufe  $a$  und  $b$  abgeleitet ist. —

Zur Ausbildung der Tensorrechnung leistet dieser Paragraph keinen Beitrag; wem also nur an der Beherrschung des formalen Kalküls gelegen ist, kann ganz von ihm absehen. Für das Verständnis des Wesens der in Geometrie und Physik eine Rolle spielenden Größen scheint mir aber sein Inhalt von Wichtigkeit zu sein.

## § 8. Tensoranalysis. Spannungen.

Größen, die den von Ort zu Ort wechselnden Zustand eines räumlich ausgebreiteten physikalischen Systems beschreiben, haben nicht einen Wert schlechthin, sondern nur »in jedem Punkte«; sie sind, mathematisch ausgedrückt, »Funktionen des Orts«. Je nachdem es sich um einen Skalar, Vektor oder Tensor handelt, sprechen wir von einem skalaren, Vektor- oder Tensor-Feld. Ein solches ist also gegeben, wenn jedem Punkte des Raumes oder eines bestimmten Raumgebietes ein Skalar, Vektor oder Tensor der betr. Art zugeordnet ist. Benutzen wir ein bestimmtes Koordinatensystem, so erscheinen dann der Wert der skalaren Größe, bzw. die Werte der Komponenten der vektoriellen oder tensoriellen Größe in diesem Koordinatensystem als Funktionen der Koordinaten eines dem betreffenden Gebiete variablen Raumpunktes.

Die Tensoranalysis lehrt, wie durch Differentiation nach den Raumkoordinaten aus einem Tensorfeld ein neues in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise hergeleitet werden kann. Sie ist wie Tensoralgebra von äußerster Einfachheit: sie kennt nur eine Operation, die *Differentiation*.

Bedeutet  $x_i$  die Koordinaten eines beliebigen Punktes  $P$  in einem affinen Koordinatensystem,  $\bar{x}_i$  die Koordinaten desselben Punktes in einem andern solchen System, so besteht zwischen den  $x_i$  und  $\bar{x}_i$  ein gewisser linearer Zusammenhang, der sich durch die linearen Transformationsformeln

$$x_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \bar{x}_k + \alpha_i$$

mit konstanten Koeffizienten ausdrückt. Die Komponenten  $\xi^i$  einer Vektorfunktion erfahren bei diesem Übergang diejenige homogene Transformation, welche aus der inhomogenen durch Fortlassen der konstanten  $\alpha_i$  entsteht. Ist

$$\varphi = f(x_1 x_2 \dots x_n) = f(x)$$

ein gegebenes Skalarfeld, so ist die einer infinitesimalen Verrückung des Argumentpunktes, bei welcher dessen Koordinaten  $x_i$  die Änderungen  $\Delta x_i$  erfahren, entsprechende Änderung von  $\varphi$  gegeben durch das totale Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Der Sinn dieser Formel ist der, daß, wenn  $\Delta x_i$  zunächst die Komponenten einer endlichen Verrückung sind und  $\Delta f$  die zugehörige Änderung von  $f$ , der Unterschied zwischen

$$\Delta f \text{ und } \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$$

mit den Verrückungskomponenten nicht nur absolut zu 0 herabsinkt,

relativ zu der Größe der Verrückung, die etwa durch  $|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \dots + |\Delta x_n|$  gemessen werde. Daraus geht hervor, daß

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

die kovarianten Komponenten eines Vektors sind, der aus dem Skalarfeld  $\varphi$  in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise entspringt. In der gewöhnlichen Vektorrechnung tritt er als *Gradient* auf und wird durch das Symbol  $\text{grad } \varphi$  bezeichnet.

Diese Operation läßt sich sofort von einem skalaren auf ein beliebiges Tensorfeld übertragen. Seien z. B.  $f_{ik}^h(x)$  die in bezug auf  $i, k$  kovarianten, in bezug auf  $h$  kontravarianten Komponenten eines Tensorfeldes 3. Stufe (in dem weiten Sinne des § 5), dann ist

$$f_{ik}^h \xi_k \eta^i \zeta^h$$

eine Invariante, wenn wir unter den  $\xi_k$  ein willkürliches, aber *konstantes*, d. h. vom Ort unabhängiges Wertsystem der unteren, unter  $\eta^i, \zeta^i$  ebensolche Wertsysteme der oberen Variablen verstehen. Die einer infinitesimalen Verrückung mit den Komponenten  $dx_i$  entsprechende Änderung dieser Invariante ist gegeben durch

$$\frac{\partial f_{ik}^h}{\partial x_l} \xi_k \eta^i \zeta^h dx_l,$$

und folglich sind

$$f_{ikl}^h = \frac{\partial f_{ik}^h}{\partial x_l}$$

die Komponenten eines Tensorfeldes 4. Stufe, das in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise aus dem gegebenen entspringt. Das ist der Prozess der *Differentiation*; durch ihn wird, wie man sieht, die Stufenzahl des Tensors um 1 erhöht. Es ist noch zu bemerken: wegen der Unabhängigkeit des metrischen Fundamentaltensors vom Ort erhält man z. B. die in bezug auf den Index  $k$  kontravarianten Komponenten des eben gebildeten Tensors, indem man unter dem Differentiationszeichen den Index  $k$  nach oben schafft:  $\frac{\partial f_{ik}^h}{\partial x_l}$ ; die Verwandlung von kovariant in kontravariant und die Differentiation sind vertauschbar. Die Differentiation kann rein formal so ausgeführt werden, als ob der betr. Tensor mit einem Vektor multipliziert würde, dessen kovariante Komponenten

$$(50) \quad \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial}{\partial x_n}$$

sind; dabei wird der Differentialquotient  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  als symbolisches Produkt von  $f$  mit  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  behandelt. Den symbolischen Vektor (50) findet man in der Literatur öfter mit dem geheimnisvollen Namen »Nabla-Vektor« belegt.

*Beispiele.* Aus dem Vektor mit den kovarianten Komponenten  $u_i$  entspringt der Tensor 2. Stufe  $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = u_{ik}$ . Daraus bilden wir insbesondere

$$(51) \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}.$$

Während in dem natürlichen System des vorigen Paragraphen dem Tensor  $u_{ik}$  keine Bedeutung zukommt, sind diese Größen die kovarianten Komponenten eines Flächentensors 1. Stufe; in der gewöhnlichen Vektorrechnung tritt er (mit entgegengesetztem Vorzeichen) als *Rotation* (rot oder curl) auf. Hingegen sind die Größen

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

die kovarianten Komponenten eines Linientensors 2. Stufe. Bedeutet der Vektor  $u$  die Geschwindigkeit kontinuierlich ausgebreiteter, sich bewegender Materie als Funktion des Orts, so gibt das Verschwinden dieses Tensors an einer Stelle kund, daß die unmittelbare Umgebung der Stelle sich wie ein starrer Körper bewegt; er verdient daher, als »*Verzerrungstensor*« bezeichnet zu werden. Endlich aber entsteht aus  $u_{ik}$  durch Verjüngung der Skalar

$$\frac{\partial u^i}{\partial x_i},$$

in der Vektorrechnung als *Divergenz* (div) bekannt.

Aus einem Tensor 2. Stufe mit den gemischten Komponenten  $S_i^k$  entspringt durch Differentiation und Verjüngung der Vektor

$$\frac{\partial S_i^k}{\partial x_k}.$$

Sind  $v_{ik}$  die kovarianten Komponenten eines Flächentensorfeldes 1. Stufe, so entsteht entsprechend der Formel (49), in der wir  $b$  durch  $v$  und  $a$  durch den symbolischen Vektor »Differentiation« ersetzen, aus ihm der Raumtensor 1. Stufe mit den Komponenten

$$(52) \quad \frac{\partial v_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial v_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{ik}}{\partial x_l}.$$

Der Flächentensor (51), rot, verschwindet, wenn  $u_i$  Gradient eines Skalarfeldes ist; der Raumtensor (52) verschwindet, wenn  $v_{ik}$  die rot eines Vektors  $u_i$  ist.

*Spannungen.* Ein wichtiges Beispiel für ein Tensorfeld bilden die Spannungen in einem elastischen Körper; von diesem Beispiel her haben die Tensoren ihren Namen erhalten. In einem elastischen Körper, an dessen Oberfläche Zug- oder Druckkräfte angreifen, auf dessen Inneres außerdem irgendwelche an den einzelnen Teilen der Materie angreifende »Volumkräfte« (z. B. die Schwerkraft) wirken, stellt sich ein Gleichgewichtszustand her, in dem die durch die Verzerrung beanspruchten

Kohäsionskräfte der Materie jenen eingepprägten Kräften das Gleichgewicht halten. Schneiden wir ein beliebiges Stück  $J$  der Materie in Gedanken aus dem Körper heraus, lassen es erstarren und entfernen die übrige Materie, so werden die eingepprägten Volumkräfte für sich an diesem Stück der Materie sich nicht das Gleichgewicht halten; sie sind aber ins Gleichgewicht gesetzt durch die auf die Oberfläche  $\Omega$  des Stückes  $J$  wirkenden Druckkräfte, die von dem weggeschnittenen Teil der Materie auf  $J$  ausgeübt werden. In der Tat haben wir uns, wenn wir auf die atomistische Feinstruktur der Materie nicht eingehen, vorzustellen, daß die Kohäsionskräfte nur in der unmittelbaren Berührung wirksam sind, so daß also die Einwirkung des weggeschnittenen Materieteils auf  $J$  durch solche oberflächlichen Druckkräfte muß ersetzt werden können; und zwar darf, wenn  $\mathfrak{S} d\sigma$  die auf ein Flächenelement  $d\sigma$  wirkende Druckkraft ist,  $\mathfrak{S}$  also den Druck pro Flächeneinheit bedeutet,  $\mathfrak{S}$  nur abhängen von der Stelle, an der sich das Flächenelement  $d\sigma$  befindet und von der ins Innere von  $J$  gerichteten Normalen  $n$  dieses Flächenelements (welche die »Stellung« von  $d\sigma$  charakterisiert). Für  $\mathfrak{S}$  schreiben wir, um die letztere Abhängigkeit auszudrücken,  $\mathfrak{S}_n$ . Bedeutet  $-n$  die der Normale  $n$  entgegengesetzte Normalenrichtung, so folgt aus dem Gleichgewicht für eine kleine, unendlich dünne Scheibe, daß

$$(53) \quad \mathfrak{S}_{-n} = -\mathfrak{S}_n$$

sein muß.

Wir benutzen Cartesische Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$ . Die Druckkräfte pro Flächeneinheit an einer Stelle, welche gegen ein Flächenelement daselbst wirken, dessen innere Normale in die Richtung der positiven  $x_1$ , bzw.  $x_2$ , bzw.  $x_3$ -Achse fällt, mögen mit  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$  bezeichnet werden. Wir wählen irgend drei positive Zahlen  $a_1, a_2, a_3$  von der Quadratsumme 1 und eine positive Zahl  $\varepsilon$ , die gegen 0 konvergieren soll (während die  $a_i$  festbleiben). Wir tragen vom betrachteten Punkt  $O$  aus in Richtung der positiven Koordinatenachsen die Strecken

$$OP_1 = \varepsilon a_1, \quad OP_2 = \varepsilon a_2, \quad OP_3 = \varepsilon a_3$$

ab und betrachten das infinitesimale Tetraeder  $OP_1P_2P_3$  mit den »Wänden«  $OP_2P_3, OP_3P_1, OP_1P_2$  und dem »Dach«  $P_1P_2P_3$ . Ist  $f$  der Flächeninhalt des Daches und  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  die Richtungskosinusse seiner inneren Normalen  $n$ , so sind die Flächeninhalte der Wände

$$-f \cdot \alpha_1 (= \frac{1}{2} \varepsilon^2 a_2 a_3), \quad -f \cdot \alpha_2, \quad -f \cdot \alpha_3.$$

Der Druck auf die Wände und das Dach beträgt also insgesamt bei unendlich kleinem  $\varepsilon$ :

$$f\{\mathfrak{S}_n - (\alpha_1 \mathfrak{S}_1 + \alpha_2 \mathfrak{S}_2 + \alpha_3 \mathfrak{S}_3)\}.$$

$f$  ist von der Größenordnung  $\varepsilon^2$ ; die auf das Tetraedervolumen wirkende Volumkraft ist aber nur von der Größenordnung  $\varepsilon^3$ . Daher muß zufolge der Gleichgewichtsbedingung

$$\mathfrak{S}_n = \alpha_1 \mathfrak{S}_1 + \alpha_2 \mathfrak{S}_2 + \alpha_3 \mathfrak{S}_3$$

sein. Mit Hilfe von (53) überträgt sich diese Formel unmittelbar auf den Fall, daß das Tetraeder in einem der übrigen 7 Oktanten gelegen ist. Nennen wir die Komponenten von  $\mathfrak{S}_i$  in bezug auf die Koordinatenachsen  $S_{i1}, S_{i2}, S_{i3}$  und sind  $\xi^i, \eta^i$  die Komponenten zweier beliebiger Verschiebungen von der Länge 1, so ist

$$(54) \quad \sum_{ik} S_{ik} \xi^i \eta^k$$

die in die Richtung von  $\eta$  fallende Komponente derjenigen Druckkraft, die gegen ein Flächenelement mit der inneren Normale  $\xi$  stattfindet. Die Bilinearform (54) hat also eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung, und  $S_{ik}$  sind die Komponenten eines Tensorfeldes »Spannung«. Wir operieren hier auch weiter mit rechtwinkligen Koordinatensystemen, so daß wir zwischen kovariant und kontravariant nicht zu unterscheiden brauchen.

Wir bilden den Vektor  $\mathfrak{S}'_i$  mit den Komponenten  $S_{i1}, S_{i2}, S_{i3}$ . Die in die Richtung der inneren Normale  $n$  eines Flächenelements fallende Komponente von  $\mathfrak{S}'_i$  ist dann gleich der  $x_i$ -Komponente von  $\mathfrak{S}_n$ . Die  $x_i$ -Komponente der Gesamt-Druckkraft, die auf der Oberfläche  $\Omega$  des herausgeschnittenen Materiestücks  $J$  liegt, ist daher gleich dem Oberflächenintegral der normalen Komponente von  $\mathfrak{S}'_i$ , und das ist nach dem Gaußschen Satz gleich dem Volumintegral

$$-\int_J \operatorname{div} \mathfrak{S}'_i \cdot dV;$$

das gleiche gilt für die  $x_2$ - und  $x_3$ -Komponente. Wir haben also den Vektor  $\mathfrak{p}$  mit den Komponenten

$$p_i = - \sum_k \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}$$

zu bilden (das ist, wie wir wissen, ein invariantes Bildungsgesetz); einer Volumkraft von der Richtung und Stärke  $\mathfrak{p}$  pro Volumeinheit sind die Druckkräfte  $\mathfrak{S}$  in dem Sinne äquivalent, daß für jedes herausgegriffene Stück Materie  $J$

$$(55) \quad \int_{\Omega} \mathfrak{S}_n d\sigma = \int_J \mathfrak{p} dV$$

ist. Ist  $\mathfrak{f}$  die eingeprägte Kraft pro Volumeinheit, so lautet die erste Gleichgewichtsbedingung für das erstarrt gedachte Materiestück

$$\int_J (\mathfrak{p} + \mathfrak{f}) dV = 0,$$

und da dies für jeden Teil  $J$  zutreffen muß:

$$(56) \quad \mathfrak{p} + \mathfrak{f} = 0.$$

Wählen wir einen beliebigen Anfangspunkt  $O$  und bedeutet  $\mathbf{r}$  den Radiusvektor  $\overrightarrow{OP}$  nach dem Argumentpunkt  $P$ , die eckige Klammer da

»vektorielle« Produkt, so lautet die zweite Gleichgewichtsbedingung, die Momentengleichung:

$$\int_{\Omega} [\mathbf{r}, \mathfrak{S}_n] d\sigma + \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{r}, \mathfrak{f}] dV = 0,$$

und da allgemein (56) gilt, muß also außer (55) auch noch

$$\int_{\Omega} [\mathbf{r}, \mathfrak{S}_n] d\sigma = \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{r}, \mathfrak{p}] dV$$

sein. Die  $x_1$ -Komponente von  $[\mathbf{r}, \mathfrak{S}_n]$  ist gleich der in der Richtung  $n$  genommenen Komponente von  $x_2 \mathfrak{S}'_3 - x_3 \mathfrak{S}'_2$ ; daher ist nach dem Gaußschen Satz die  $x_1$ -Komponente der linken Seite

$$= - \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} (x_2 \mathfrak{S}'_3 - x_3 \mathfrak{S}'_2) dV,$$

und es kommt die Gleichung

$$\operatorname{div} (x_2 \mathfrak{S}'_3 - x_3 \mathfrak{S}'_2) = - (x_2 p_3 - x_3 p_2).$$

Die linke Seite ist aber

$$\begin{aligned} &= (x_2 \operatorname{div} \mathfrak{S}'_3 - x_3 \operatorname{div} \mathfrak{S}'_2) + (\mathfrak{S}'_3 \cdot \operatorname{grad} x_2 - \mathfrak{S}'_2 \cdot \operatorname{grad} x_3) \\ &= - (x_2 p_3 - x_3 p_2) + (S_{23} - S_{32}). \end{aligned}$$

Demnach ergibt diese Gleichgewichtsbedingung, wenn wir außer der  $x_1$ -noch die  $x_2$ - und  $x_3$ -Komponente bilden:

$$S_{23} = S_{32}, \quad S_{31} = S_{13}, \quad S_{12} = S_{21},$$

d. h. die Symmetrie des *Spannungstensors*  $S$ . Derselbe ist demnach ein *Linientensor* 2. Stufe. Für eine beliebige Verschiebung mit den Komponenten  $\xi^i$  ist

$$\frac{\sum S_{ik} \xi^i \xi^k}{\sum g_{ik} \xi^i \xi^k}$$

die in die Richtung von  $\xi$  fallende Komponente der Druckkraft pro Flächeneinheit, welche gegen ein senkrecht zu dieser Richtung gestelltes Flächenelement wirkt. (Hier darf nun wieder ein beliebiges affines Koordinatensystem benutzt werden.) Die Spannungen sind einer Volumkraft vollständig äquivalent, deren Dichte  $p$  sich nach den invarianten Formeln

$$(57) \quad -p_i = \frac{\partial S_i^k}{\partial x_k}$$

berechnet. — Im Falle eines allseitig gleichen Drucks  $p$  ist

$$S_{ik} = p \cdot g_{ik}, \quad p_i = - \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Durch das Vorige hat nur der Begriff der Spannung seine exakte Formulierung und mathematische Darstellung gefunden. Zur Aufstellung der Grundgesetze der Elastizitätstheorie ist es weiterhin erforderlich, die Abhängigkeit der Spannung von der durch die eingepprägten Kräfte bewirkten Verzerrung der Materie zu ermitteln. Wir haben keinen Anlaß, hier darauf näher einzugehen.

## § 9. Das stationäre elektromagnetische Feld.

Wo bisher von mechanischen oder physikalischen Dingen die Rede war, geschah es zunächst zu dem Zweck, zu zeigen, worin sich deren räumliche Natur kundgibt: nämlich darin, daß sich ihre Gesetze als invariante Tensorrelationen ausdrücken. Wir hatten dadurch aber zugleich Gelegenheit, die Bedeutung der Tensorrechnung an konkreten Beispielen klar zu machen und spätere Auseinandersetzungen vorzubereiten, die sich gründlicher mit physikalischen Theorien — um ihrer selbst willen und wegen ihrer Bedeutung für das Zeitproblem — befassen werden. In dieser Hinsicht wird nun namentlich die *Theorie des elektromagnetischen Feldes*, das vollkommenste Stück Physik, das wir heute kennen, von größter Wichtigkeit werden. Hier betrachten wir sie nur insofern, als die Zeit noch nicht in Frage kommt, d. h. wir beschränken uns auf zeitlich unveränderliche stationäre Verhältnisse.

Das *Coulombsche Gesetz* der Elektrostatik läßt sich folgendermaßen aussprechen: Sind im Raum irgendwelche Ladungen mit der Dichte  $\varrho$  verteilt, so üben sie auf eine Punktladung  $e$  die Kraft

$$(58) \quad \mathfrak{R} = e \cdot \mathfrak{E}$$

aus, worin

$$(59) \quad \mathfrak{E} = - \int \frac{\varrho \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} dV.$$

Hier bedeutet  $\mathbf{r}$  den Vektor  $\overset{\text{»}}{\rightarrow} OP$ , der vom »Aufpunkt«  $O$ , in welchem  $\mathfrak{E}$  bestimmt werden soll, zum Argument- oder »Quell«-Punkt  $P$  führt, nach dem integriert wird;  $r$  seine Länge;  $dV$  das Volumelement. Die Kraft setzt sich also aus zwei Faktoren zusammen, der Ladung  $e$  des kleinen Probekörpers, die nur von dessen Zustand abhängt, und der »Feldstärke«  $\mathfrak{E}$ , welche im Gegenteil allein durch die gegebene Ladungsverteilung im Raum bestimmt ist. Wir machen uns die Vorstellung, daß auch dann, wenn wir an keinem Probekörper die Kraft  $\mathfrak{R}$  beobachten, durch die im Raume verteilten Ladungen ein »elektrisches Feld« hervorgerufen wird, das durch den Vektor  $\mathfrak{E}$  beschrieben ist; an einer hereingebrachten Punktladung  $e$  gibt es sich durch die Kraft (58) kund.  $\mathfrak{E}$  können wir aus einem Potential\*) —  $\varphi$  ableiten nach der Formel

$$(60) \quad \mathfrak{E} = \text{grad } \varphi, \quad -4\pi\varphi = \int \frac{\varrho}{r} dV.$$

Daraus folgt, 1) daß  $\mathfrak{E}$  wirbelfrei ist, und 2) daß der Fluß von  $\mathfrak{E}$  durch irgend eine geschlossene Oberfläche gleich den von dieser Oberfläche umschlossenen Ladungen ist, oder daß die Elektrizität Quelle des elektrischen Feldes ist; in Formeln

$$(61) \quad \text{rot } \mathfrak{E} = 0, \quad \text{div } \mathfrak{E} = \varrho.$$

\*) Um späterer Zwecke willen (§ 25) muß ich hier die übliche Bezeichnung  $\varphi$  des Potentials in  $-\varphi$  abändern.

Aus diesen einfachen Differentialgesetzen geht rückwärts wieder das Coulombsche Gesetz hervor unter Hinzunahme der Bedingung, daß das Feld  $\mathcal{E}$  im Unendlichen verschwindet. Machen wir nämlich zufolge der ersten dieser Gleichungen (61) den Ansatz  $\mathcal{E} = \text{grad } \varphi$ , so ergibt sich aus der zweiten zur Bestimmung von  $\varphi$  die Poissonsche Gleichung  $\Delta \varphi = \varrho$ , deren Lösung durch (60) geliefert wird.

Das Coulombsche Gesetz ist ein *Fernwirkungsgesetz*: in ihm erscheint die Feldstärke an einer Stelle abhängig von den Ladungen an allen andern Stellen, den nächsten und fernsten, im Raum. Im Gegensatz dazu drücken die viel einfacheren Formeln (61) *Nahewirkungsgesetze* aus: da zur Bestimmung des Differentialquotienten einer Funktion an einer Stelle die Kenntnis ihres Wertverlaufs in einer beliebig kleinen Umgebung dieser Stelle genügt, sind durch (61) die Werte von  $\varrho$  und  $\mathcal{E}$  an einer Stelle und deren unmittelbarer Umgebung miteinander in Zusammenhang gebracht. Diese Nahewirkungsgesetze fassen wir als den wahren Ausdruck des in der Natur bestehenden Wirkungszusammenhanges auf, (59) aber nur als eine daraus sich ergebende mathematische Konsequenz; auf Grund der Gesetze (61), die eine so einfache anschauliche Bedeutung haben, glauben wir zu *verstehen*, woher das Coulombsche Gesetz kommt. Gewiß folgen wir hier vor allem einem erkenntnistheoretischen Zwang; schon Leibniz hat die Forderung der Kontinuität, der Nahewirkung als ein allgemeines Prinzip formuliert und sich aus diesem Grunde mit dem Newtonschen Fernwirkungsgesetz der Gravitation, das ja dem Coulombschen völlig entspricht, nicht befreunden können. Daneben kommt aber die mathematische Durchsichtigkeit und der einfache anschauliche Sinn der Gesetze (61) in Betracht; immer wieder machen wir in der Physik die Erfahrung, daß, wenn wir erst einmal dazu gelangt sind, die Gesetzmäßigkeit eines bestimmten Erscheinungsgebietes völlig zu durchdringen, sie sich in Formeln von vollendeter mathematischer Harmonie ausspricht. Schließlich legt, was das Physikalische betrifft, die Maxwellsche Theorie in ihrer Weiterentwicklung beständig Zeugnis davon ab, von wie ungeheurer Fruchtbarkeit der Schritt von der alten Fernwirkungsvorstellung zu der modernen der Nahewirkung war.

Das Feld übt auf die Ladungen, welche es erzeugen, eine Kraft aus, deren Dichte pro Volumeinheit durch die Formel

$$(62) \quad \mathfrak{p} = \varrho \mathcal{E}$$

gegeben ist: so werden wir die Gleichung (58) in strenger Weise zu deuten haben. Bringen wir einen geladenen Probekörper in das Feld hinein, so gehört auch seine Ladung mit zu den felderzeugenden Ladungen, und die Formel (58) wird nur dann zur richtigen Bestimmung des vor dem Hineinbringen des Probekörpers herrschenden Feldes  $\mathcal{E}$  dienen können, wenn die Probeladung  $e$  so schwach ist, daß sie das Feld nur unmerklich verändert. Es ist das eine Schwierigkeit, die sich durch die ganze experimentelle Physik hindurchzieht: daß wir durch das Herein-

bringen des Meßinstruments die ursprünglichen Verhältnisse, welche gemessen werden sollen, stören; daher stammen zum guten Teil die Fehlerquellen, auf deren Elimination der Experimentator so viel Scharfsinn verwenden muß.

Das Grundgesetz der Mechanik:  $\text{Masse} \times \text{Beschleunigung} = \text{Kraft}$  lehrt, was für eine Bewegung der Massen unter dem Einfluß gegebener Kräfte (bei gegebenen Anfangsgeschwindigkeiten) eintritt. Was aber *Kraft* ist, lehrt die Mechanik nicht; das erfahren wir in der Physik. *Das Grundgesetz der Mechanik ist ein offenes Schema, das einen konkreten Inhalt erst gewinnt, wenn der in ihm auftretende Kraftbegriff durch die Physik ausgefüllt wird.* Die unglücklichen Versuche, die Mechanik als eine abgeschlossene Disziplin für sich zu entwickeln, haben sich daher auch niemals anders zu helfen gewußt als dadurch, daß sie das Grundgesetz zu einer Worterklärung machten: *Kraft bedeutet Masse  $\times$  Beschleunigung.* Hier in der Elektrostatik erkennen wir aber für ein besonderes physikalisches Erscheinungsgebiet, was Kraft ist und wie sie sich gesetzmäßig durch (62) aus den *Zustandsgrößen* Ladung und Feld bestimmt. Sehen wir die Ladungen als gegeben an, so liefern die Feldgleichungen (61) den Zusammenhang, durch welchen die Ladungen das von ihnen erzeugte Feld determinieren. Was aber die Ladungen betrifft, so weiß man, daß sie an die Materie gebunden sind. Die moderne Elektronentheorie zeigte, daß das in einem ganz strengen Sinne verstanden werden kann: die Materie besteht aus Elementarquanten, den Elektronen, die eine völlig bestimmte unveränderliche Masse und dazu eine völlig bestimmte unveränderliche Ladung besitzen. Wo immer wir das Auftreten neuer Ladungen beobachten, beruht dies lediglich darauf, daß positive und negative Elementarladungen, die vorher so nahe beieinander waren, daß sie sich in ihrer Fernwirkung vollständig kompensierten, auseinandertreten; es »entsteht« daher bei solchen Prozessen auch immer gleichviel positive und negative Elektrizität. Damit schließen sich die Gesetze zu einem Zykel: die Verteilung der mit ein für allemal festen Ladungen versehenen Elementarquanten der Materie und (wie man bei nicht-stationären Verhältnissen hinzufügen muß) ihre Geschwindigkeiten bestimmen das Feld; das Feld übt auf die geladene Materie eine durch (62) gegebene ponderomotorische Kraft aus; die Kraft bestimmt nach dem Fundamentalgesetz der Mechanik die Beschleunigung und damit die Verteilung und Geschwindigkeit der Materie im nächsten Moment. *Erst dieser ganze theoretische Zusammenhang ist einer experimentellen Nachprüfung fähig* — wenn wir annehmen, daß die Bewegung der Materie das ist, was wir direkt beobachten können (was übrigens auch nur bedingt zugegeben werden kann); nicht aber ein einzelnes, aus diesem theoretischen Gefüge herausgerissenes Gesetz! Der Zusammenhang zwischen der unmittelbaren Erfahrung und dem, was die Vernunft begrifflich als das hinter ihr steckende Objektive in einer Theorie zu erfassen sucht, ist nicht so einfach, daß jede einzelne Aussage der Theorie für sich einen unmittelba

in der Anschauung zu verifizierenden Sinn besäße. Wir werden im folgenden immer deutlicher sehen, daß Geometrie, Mechanik und Physik in dieser Weise eine unlösbare theoretische Einheit bilden, etwas, das man immer *als Ganzes* vor Augen haben muß, wenn man danach fragt, ob jene Wissenschaften die in allem subjektiven Bewußtseins-Erleben sich bekundende, dem Bewußtsein transzendente Wirklichkeit vernünftig deuten: die Wahrheit bildet ein *System*. — Im übrigen ist das hier in seinen ersten Zügen geschilderte physikalische Weltbild charakterisiert durch den Dualismus von *Materie* und *Feld*, die sich in gegenseitiger Wechselwirkung befinden; erst durch die Relativitätstheorie ist dieser Dualismus, und zwar zugunsten einer reinen Feldphysik, überwunden worden (vgl. § 24).

Die ponderomotorische Kraft im elektrischen Feld ist schon von Faraday auf *Spannungen* zurückgeführt worden. Benutzen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $x_1, x_2, x_3$ , in welchem  $E_1, E_2, E_3$  die Komponenten der elektrischen Feldstärke sind, so ist die  $x_i$ -Komponente der Kraftdichte

$$p_i = q E_i = E_i \left( \frac{\partial E_1}{\partial x_i} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \right).$$

Durch eine einfache, die Wirbellosigkeit von  $\mathfrak{E}$  berücksichtigende Umrechnung findet man daraus, daß die Komponenten  $p_i$  der Kraftdichte sich nach den Formeln (57) aus einem Spannungstensor ableiten, dessen Komponenten  $S_{ik}$  in dem folgenden quadratischen Schema zusammengestellt sind:

$$(63) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(E_2^2 + E_3^2 - E_1^2), & -E_1 E_2, & -E_1 E_3 \\ -E_2 E_1, & \frac{1}{2}(E_3^2 + E_1^2 - E_2^2), & -E_2 E_3 \\ -E_3 E_1, & -E_3 E_2, & \frac{1}{2}(E_1^2 + E_2^2 - E_3^2) \end{vmatrix}.$$

Wir sehen, daß die Symmetriebedingung  $S_{ki} = S_{ik}$  erfüllt ist. Vor allem ist aber von Wichtigkeit, daß die Komponenten des Spannungstensors an einer Stelle nur von der elektrischen Feldstärke *an dieser Stelle* abhängen. (Sie hängen zudem nur von dem *Feld*, nicht auch von der *Ladung* ab.) Immer wenn eine Kraft  $p$  sich nach (57) auf Spannungen  $S$ , die einen Linientensor 2. Stufe bilden, zurückführen läßt, welcher nur von den Werten der den physikalischen Zustand beschreibenden Zustandsgrößen an der betreffenden Stelle abhängt, werden wir diese Spannungen als das Primäre, die Kraftwirkungen als ihre Folge zu betrachten haben. Mathematisch erhellt die Berechtigung dieser Auffassungsweise daraus, daß die Kraft  $p$  sich aus der Spannung durch Differentiation ergibt; die Spannungen liegen also gegenüber den Kräften sozusagen um eine Differentiationsstufe weiter zurück und hängen trotzdem nicht, wie es für ein beliebiges Integral der Fall wäre, von dem ganzen Verlauf der Zustandsgrößen, sondern nur von ihrem Wert an der betr. Stelle ab.

Der Tensor (63) ist natürlich unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Führen wir das Quadrat des Betrages der Feldstärke ein

$$|E|^2 = E_i E^i,$$

so ist in der Tat

$$S_{ik} = \frac{1}{2} g_{ik} |E|^2 - E_i E_k;$$

das sind die kovarianten Spannungskomponenten nicht nur in einem Cartesischen, sondern in einem beliebigen affinen Koordinatensystem, wenn die  $E_i$  die kovarianten Komponenten der Feldstärke sind. Die anschauliche Bedeutung der Spannungen ist überaus einfach. Benutzen wir an einer Stelle rechtwinklige Koordinaten, deren  $x_1$ -Achse in die Richtung von  $\mathfrak{E}$  weist:

$$E_1 = |E|, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = 0,$$

so finden wir: sie bestehen aus einem Zug von der Stärke  $\frac{1}{2}|E|^2$  in Richtung der Kraftlinien und einem Druck von der gleichen Stärke senkrecht zu ihnen.

Die elektrostatischen Grundgesetze können wir in invarianter Tensorgestalt jetzt so zusammenfassen:

$$(64) \quad \begin{cases} \text{(I)} & \frac{\partial E_i}{\partial x_k} - \frac{\partial E_k}{\partial x_i} = 0, \quad \text{bzw.} \quad E_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}; \\ \text{(II)} & \frac{\partial E^i}{\partial x_i} = \varrho; \\ \text{(III)} & S_{ik} = \frac{1}{2} g_{ik} |E|^2 - E_i E_k. \end{cases}$$

Einem System einzelner Punktladungen  $e_1, e_2, e_3, \dots$  kommt die potentielle Energie

$$U = \frac{1}{8\pi} \sum_{i \neq k} \frac{e_i e_k}{r_{ik}}$$

zu;  $r_{ik}$  bedeutet die Entfernung der beiden Ladungen  $e_i$  und  $e_k$ . Dies besagt, daß die virtuelle Arbeit, welche die an den einzelnen Punkten angreifenden (von den Ladungen der übrigen Punkte herrührenden) Kräfte bei einer infinitesimalen Verrückung der Punkte leisten, ein totales Differential, nämlich  $= \delta U$  ist. Für kontinuierlich verteilte Ladungen geht diese Formel über in:

$$U = \iint \frac{\varrho(P) \varrho(P')}{8\pi r_{PP'}} dV dV';$$

beide Volumintegrationen nach  $P$  und  $P'$  erstrecken sich über den ganze Raum,  $r_{PP'}$  ist die Entfernung dieser beiden Punkte. Unter Benutzung des Potentials  $\varphi$  können wir dafür schreiben

$$U = -\frac{1}{2} \int \varrho \varphi dV.$$

Der Integrand ist  $\varphi \cdot \text{div } \mathfrak{E}$ . Zuzufolge der Gleichung

$$\text{div}(\varphi \mathfrak{E}) = \varphi \cdot \text{div } \mathfrak{E} + \mathfrak{E} \cdot \text{grad } \varphi$$

und des Gaußschen Satzes, nach dem das über den gesamten Raum erstreckte Integral von  $\text{div}(\varphi \mathfrak{E})$  gleich 0 wird, ist

$$\begin{aligned} -\int \varrho \varphi dV &= \int (\mathfrak{E} \cdot \text{grad } \varphi) dV = \int |E|^2 dV: \\ (65) \quad U &= \int \frac{1}{2} |E|^2 dV. \end{aligned}$$

Diese Darstellung der Energie setzt unmittelbar in Evidenz, daß die Energie einen positiven Betrag besitzt. Führen wir die Kräfte auf Spannungen zurück, so müssen wir uns vorstellen, daß diese Spannungen (wie die Spannungen des elastischen Körpers) überall mit positiver potentieller Spannungsenergie verbunden sind; der Sitz der Energie wird also im Felde zu suchen sein. Darüber gibt die Formel (65) völlig befriedigende Rechenschaft; sie lehrt, daß die mit der Spannung verbundene Energie pro Volumeinheit  $\frac{1}{2} |E|^2$  beträgt, also genau gleich dem Zug und Druck ist, welche in Richtung und senkrecht zu den Kraftlinien stattfinden. Wieder ist es natürlich entscheidend für die Zulässigkeit dieser Auffassungsweise, daß die erhaltene Energiedichte nur von dem Werte der das Feld charakterisierenden Zustandsgröße  $\mathfrak{E}$  an der betr. Stelle abhängt. Es kommt jetzt nicht nur dem Gesamtfeld, sondern auch jedem Stück des Feldes ein bestimmter potentieller Energieinhalt  $\int \frac{1}{2} |E|^2 dV$  zu. In der Statik spielt nur die Gesamtenergie eine Rolle; erst wenn wir hernach zur Betrachtung veränderlicher Felder übergehen, werden sich unzweifelhafte Bestätigungen der Richtigkeit dieser Auffassung einstellen.

Auf Leitern sammeln sich im statischen Feld die Ladungen auf der Oberfläche, und im Innern der Konduktoren herrscht kein elektrisches Feld. Dann reichen die Gleichungen (61) aus, um das elektrische Feld im leeren Raum, im »Äther«, zu bestimmen. Befinden sich aber Nicht-Leiter, Diëlektrika, im Felde, so ist die Erscheinung der *diëlektrischen Polarisation* zu berücksichtigen. — Zwei an den Stellen  $P_1$  und  $P_2$  befindliche Ladungen  $+e$  und  $-e$ , ein »Quellpaar«, wie wir kurz sagen wollen, erzeugen ein Feld, das aus dem Potential

$$\frac{e}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

entspringt, in welchem  $r_1$  und  $r_2$  die Entfernungen der Punkte  $P_1, P_2$  vom Aufpunkt  $O$  bedeuten. Das Produkt aus  $e$  und dem Vektor  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  heiße das Moment  $\mathfrak{m}$  des Quellpaares. Lassen wir die beiden Ladungen an einer Stelle  $P$  in bestimmter Richtung zusammenrücken, indem wir dabei die Ladung gleichzeitig so wachsen lassen, daß das Moment  $\mathfrak{m}$  konstant bleibt, so entsteht im Limes die »Doppelquelle« vom Moment  $\mathfrak{m}$ , deren Potential durch

$$\frac{\mathfrak{m}}{4\pi} \cdot \text{grad}_P \frac{1}{r}$$

gegeben ist. In einem Diëlektrikum hat nun ein elektrisches Feld zur Folge, daß in den einzelnen Volumelementen desselben derartige Doppel-

quellen entstehen; diesen Vorgang bezeichnet man als Polarisation. Ist  $m$  das elektrische Moment der Doppelquellen pro Volumeinheit, so gilt dann für das Potential statt (60) die Formel

$$(66) \quad -4\pi\varphi = \int \frac{\varrho}{r} dV + \int m \cdot \text{grad}_P \frac{1}{r} \cdot dV.$$

Vom Standpunkt der Elektronentheorie können wir diesen Vorgang ohne weiteres verstehen. Stellen wir uns etwa vor, daß ein Atom aus einem ruhenden, positiv geladenen »Kern« besteht, um den ein Elektron von der entgegengesetzten Ladung in einer Kreisbahn rotiert. Im Zeitmittel für einen vollen Umlauf des Elektrons wird dann die mittlere Lage des Elektrons mit der des Kerns zusammenfallen und das Atom nach außen als völlig neutral erscheinen. Wenn aber ein elektrisches Feld wirkt, so übt dieses auf das negative Elektron eine Kraft aus, die zur Folge haben wird, daß seine Bahn zum Atomkern exzentrisch liegt, etwa eine Ellipse wird, in deren einem Brennpunkt der Kern sich befindet. Im Mittel für solche Zeiten, die groß sind gegenüber der Umlaufzeit des Elektrons, wird das Atom dann wirken wie ein ruhendes Quellpaar; oder wenn wir die Materie als kontinuierlich behandeln, werden wir in ihr kontinuierlich verbreitete Doppelquellen annehmen müssen. Schon vor einer genaueren atomistischen Durchführung dieses Gedankens werden wir sagen können, daß wenigstens in erster Annäherung dabei das Moment pro Volumeinheit  $m$  der erregenden elektrischen Feldstärke  $\mathfrak{E}$  proportional sein wird:  $m = \kappa \mathfrak{E}$ , wo  $\kappa$  eine Materialkonstante bedeutet, die von der chemischen Beschaffenheit der Substanz, nämlich dem Bau ihrer Atome und Moleküle, abhängt. Da

$$\text{div} \left( \frac{m}{r} \right) = m \cdot \text{grad} \frac{1}{r} + \frac{\text{div } m}{r}$$

ist, können wir die Gleichung (66) ersetzen durch

$$-4\pi\varphi = \int \frac{\varrho - \text{div } m}{r} dV.$$

Für die Feldstärke  $\mathfrak{E} = \text{grad } \varphi$  ergibt sich daraus

$$\text{div } \mathfrak{E} = \varrho - \text{div } m.$$

Führen wir also die »elektrische Verschiebung«

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + m$$

ein, so lauten die Grundgleichungen jetzt

$$(67) \quad \text{rot } \mathfrak{E} = 0, \quad \text{div } \mathfrak{D} = \varrho.$$

Sie entsprechen den Gleichungen (61); in der einen von ihnen tritt aber jetzt die Feldstärke  $\mathfrak{E}$ , in der andern die elektrische Verschiebung  $\mathfrak{D}$  auf; die Ladungen sind die Quelle der elektrischen Verschiebung. Bei der obigen Annahme  $m = \kappa \mathfrak{E}$  erhält man, wenn man die Materialkonstante  $\varepsilon = 1 + \kappa$ , die sog. Dielektrizitätskonstante einführt, das Materialgesetz

$$(68) \quad \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}.$$

Durch die Beobachtung bestätigen sich diese Gesetze aufs beste. Der von Faraday experimentell nachgewiesene Einfluß des Zwischenmediums, der sich in diesen Gesetzen kundgibt, ist, wie man weiß, für die Ausbildung der Nahewirkungstheorie von großer Bedeutung gewesen. — Auf eine entsprechende Erweiterung der Formeln für Spannung, Energie und Kraft können wir hier verzichten.

Es versteht sich aus dieser Herleitung, daß (67), (68) keine streng gültigen Gesetze sind, sondern sich auf Mittelwerte beziehen, zu bilden für Räume, die viele Atome enthalten, und für Zeiten, die groß sind gegenüber den Umlaufzeiten der Elektronen im Atom. *Als die exakten Naturgesetze sehen wir nach wie vor (61) an.* Unser Absehen hier und im folgenden ist durchaus auf die exakten Naturgesetze gerichtet. Es bilden aber, wenn man von den Erscheinungen ausgeht, solche »phänomenologischen« Gesetze wie (67), (68) den notwendigen Durchgangspunkt von dem, was die Beobachtungen direkt ergeben, zu der exakten Theorie. Im allgemeinen können wir erst von ihnen aus uns eine derartige Theorie erarbeiten. Diese wird sich dann als gültig erweisen, wenn es gelingt, unter Zuhilfenahme bestimmter Vorstellungen über die atomistische Konstitution der Materie von ihr aus durch Mittelwertbildung wieder zu den phänomenologischen Gesetzen zu gelangen. Es müssen sich dabei, wenn der Atombau bekannt ist, zugleich die Werte der in diesen Gesetzen auftretenden Materialkonstanten ergeben (in den exakten Naturgesetzen kommen keine solchen Konstanten vor). Da die Gültigkeit der Materialgesetze wie (68), die den Einfluß der Materie nur in Bausch und Bogen berücksichtigen, bei Vorgängen, für welche die feinere Struktur der Materie nicht gleichgültig ist, sicher versagt, müssen sich aus einer solchen atomistischen Theorie ferner die Grenzen der Gültigkeit der phänomenologischen Theorie ergeben und diejenigen Gesetze, welche jenseits dieser Grenzen an ihre Stelle treten. Die Elektronentheorie hat in alle dem große Erfolge aufzuweisen, wenn sie auch wegen der Schwierigkeit, über den feineren Aufbau des Atoms und die Vorgänge im Innern desselben Aufschluß zu erhalten, noch lange nicht zum Abschluß gekommen ist. —

Der *Magnetismus* scheint nach den ersten Erfahrungen an permanenten Magneten nur eine Wiederholung der Elektrizität: auch hier das Coulombsche Gesetz! Sogleich aber macht sich ein charakteristischer Unterschied geltend: man kann positiven und negativen Magnetismus nicht voneinander trennen; es gibt keine Quellen, sondern nur Doppelquellen des Magnetfeldes; der Magnet besteht aus unendlichkleinen Elementarmagneten, deren jeder schon positiven und negativen Magnetismus in sich trägt. De facto ist aber die Magnetismusmenge in jedem Materiestück  $= 0$ , und das heißt denn doch: es gibt in Wahrheit gar keinen Magnetismus. Die Aufklärung brachte die Entdeckung der magnetischen Wirkung des elektrischen Stromes durch Ørsted. Die im *Biot-Savartschen Gesetz* niedergelegte genaue quantitative Formulierung dieser Wirkung führt

ebenso wie das Coulombsche auf zwei einfache Nahwirkungsgesetze: bedeutet  $\mathfrak{s}$  die Dichte des elektrischen Stroms,  $\mathfrak{H}$  die magnetische Feldstärke, so gilt

$$(69) \quad \text{rot } \mathfrak{H} = \mathfrak{s}, \quad \text{div } \mathfrak{H} = 0.$$

Die zweite Gleichung sagt die Nicht-Existenz von Quellen des Magnetfeldes aus. Die Gleichungen (69) sind ein genaues Seitenstück zu (61) unter Vertauschung von  $\text{div}$  und  $\text{rot}$ . Diese beiden Operationen der Vektoranalysis entsprechen sich in derselben Weise, wie in der Vektoralgebra skalare und vektorielle Multiplikation ( $\text{div}$  ist skalare,  $\text{rot}$  vektorielle Multiplikation mit dem symbolischen Vektor »Differentiation«). Die im Unendlichen verschwindende Lösung der Gleichungen (69) bei gegebener Stromverteilung lautet daher auch ganz entsprechend zu (59):

$$(70) \quad \mathfrak{H} = \int \frac{[\mathfrak{s} \mathbf{r}]}{4\pi r^3} dV;$$

das ist eben das Biot-Savartsche Gesetz. Man kann diese Lösung aus einem »Vektorpotential«  $\mathfrak{f}$  ableiten nach den Formeln

$$\mathfrak{H} = -\text{rot } \mathfrak{f}, \quad -4\pi \mathfrak{f} = \int \frac{\mathfrak{s}}{r} dV.$$

Schließlich lautet die Formel für die Kraftdichte des Magnetfeldes ganz analog zu (62):

$$(71) \quad \mathfrak{p} = [\mathfrak{s} \mathfrak{H}].$$

Es ist kein Zweifel, daß wir durch diese Gesetze die Wahrheit über den Magnetismus erfahren. Sie sind keine Wiederholung, aber ein genaues Seitenstück der elektrischen; sie entsprechen ihnen wie das vektorielle Produkt dem skalaren. Es läßt sich aus ihnen mathematisch beweisen, daß ein kleiner Kreisstrom genau so wirkt wie ein kleiner, senkrecht durch den Kreisstrom hindurchgesteckter Elementarmagnet. Wir haben uns infolgedessen nach Ampère vorzustellen, daß die magnetische Wirkung magnetisierter Körper auf Molekularströmen beruhe; nach der Elektronentheorie sind diese ohne weiteres gegeben durch die im Atom umlaufenden Elektronen.

Auch die Kraft  $\mathfrak{p}$  des Magnetfeldes kann auf Spannungen zurückgeführt werden, und zwar ergeben sich für die Spannungskomponenten genau die gleichen Werte wie im elektrostatischen Felde: man braucht nur  $\mathfrak{E}$  durch  $\mathfrak{H}$  zu ersetzen. Wir werden infolgedessen für die Dichte der im Felde enthaltenen potentiellen Energie hier genau den entsprechenden Ansatz  $\frac{1}{2} \mathfrak{H}^2$  machen; seine volle Rechtfertigung findet er erst in der Theorie der zeitlich veränderlichen Felder.

Aus (69) folgt, daß der Strom quellenfrei verteilt ist:  $\text{div } \mathfrak{s} = 0$ . Das Strömungsfeld kann daher in lauter in sich zurücklaufende Stromröhren zerlegt werden; durch alle Querschnitte einer einzelnen Stromröhre fließt derselbe Gesamtstrom. Aus den Gesetzen des stationären Feldes geht

keiner Weise hervor und es kommt für sie in keiner Weise in Betracht, daß dieser Strom elektrischer Strom im wörtlichen Sinne ist, d. h. aus bewegter Elektrizität besteht; dies ist aber zweifellos der Fall. Im Lichte dieser Tatsache besagt das Gesetz  $\operatorname{div} \mathfrak{s} = 0$ , daß Elektrizität weder entsteht noch vergeht. Nur darum, weil der Fluß des Stromvektors  $\mathfrak{s}$  durch eine geschlossene Oberfläche Null ist, kann die Dichte der Elektrizität allorten unverändert bleiben — es handelt sich jetzt ausschließlich um stationäre Felder! —, ohne daß Elektrizität entsteht oder vergeht. — Das oben eingeführte Vektorpotential  $\mathfrak{f}$  genügt ebenfalls der Gleichung  $\operatorname{div} \mathfrak{f} = 0$ .

$\mathfrak{s}$  ist als elektrischer Strom ohne Zweifel ein Vektor im eigentlichen Sinne des Worts. Dann geht aber aus dem Biot-Savart'schen Gesetz hervor, daß  $\mathfrak{H}$  nicht ein Vektor, sondern ein Flächentensor 1. Stufe ist, dessen Komponenten in irgend einem (Cartesischen oder auch nur affinen Koordinatensystem)  $H_{ik}$  heißen mögen. Das Vektorpotential  $\mathfrak{f}$  ist ein wirklicher Vektor. Sind  $\varphi_i$  seine kovarianten Komponenten und  $s^i$  die kontravarianten der Stromdichte (der Strom ist von Hause aus wie die Geschwindigkeit ein kontravarianter Vektor), so enthält die folgende Tabelle die endgültige (von der Dimensionszahl unabhängige) Form der Gesetze des Magnetfeldes eines stationären elektrischen Stromes:

$$(72, I) \quad \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial H_{ik}}{\partial x_l} = 0, \quad \text{bzw.} \quad H_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

und

$$(72, II) \quad \frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k} = s^i.$$

Die Spannungen bestimmen sich aus

$$(72, III) \quad S_{ik} = H_{ir} H_k^r - \frac{1}{2} g_{ik} |H|^2,$$

wo  $|H|$  den Betrag des Magnetfeldes bedeutet:

$$|H|^2 = \frac{1}{2} H_{ik} H^{ik}.$$

Der Spannungstensor ist symmetrisch, da

$$H_{ir} H_k^r = H_i^r H_{kr} = g^{rs} H_{ir} H_{ks}.$$

Die Komponenten der Kraftdichte sind

$$(72, IV) \quad p_i = H_{ik} s^k,$$

$$\text{die Energiedichte} \quad = \frac{1}{2} |H|^2.$$

Das sind die Gesetze, wie sie für das Feld im leeren Raum gelten; wir betrachten sie wie im elektrischen Fall als die allgemein gültigen exakten Naturgesetze. Für eine phänomenologische Theorie muß aber wieder die der dielektrischen Polarisation analoge Erscheinung der *Magnetisierung* beachtet werden; hier tritt dann wie  $\mathfrak{D}$  neben  $\mathfrak{E}$  die »Magnetinduktion«  $\mathfrak{B}$  neben der Feldstärke  $\mathfrak{H}$  auf, es gelten die Feldgesetze

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{z}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

und das Materialgesetz

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H};$$

(73)

die Materialkonstante  $\mu$  heißt magnetische Permeabilität. Während aber das einzelne Atom durch die Wirkung der elektrischen Feldstärke erst polarisiert (zu einer Doppelquelle) wird, und zwar in Richtung der Feldstärke, ist das Atom wegen der in ihm befindlichen rotierenden Elektronen von vorn herein ein Elementarmagnet. Aber alle diese Elementarmagnete heben ihre Wirkungen gegenseitig auf, solange sie ungeordnet sind und alle Stellungen der Elektronen-Kreisbahnen im Durchschnitt gleich oft vorkommen. Die einwirkende magnetische Kraft hat hier lediglich die Funktion, die vorhandenen Doppelquellen zu *richten*. Damit hängt es offenbar zusammen, daß der Geltungsbereich der Gleichung (73) ein viel engerer ist als der der entsprechenden Gleichung (68). Ihm sind vor allem die permanenten Magnete und die ferromagnetischen Körper (Eisen, Nickel, Kobalt) nicht unterstellt.

Zu den bisherigen tritt in der phänomenologischen Theorie als weiteres das *Ohmsche Gesetz*

$$\mathfrak{z} = \sigma \mathfrak{E} \quad (\sigma = \text{Leitfähigkeit});$$

es sagt aus, daß der Strom dem Potentialgefälle folgt und ihm bei gegebener Leitersubstanz proportional ist. In der atomistischen Theorie entspricht dem Ohmschen Gesetz das Grundgesetz der Mechanik, nach welchem die auf die »freien« Elektronen wirkende elektrische und magnetische Kraft deren Bewegung bestimmt und so den elektrischen Strom erzeugt. Infolge der Zusammenstöße mit den Molekülen wird dabei keine dauernde Beschleunigung eintreten, sondern (wie bei einem schwer fallenden Körper infolge des Luftwiderstandes) sich alsbald eine Grenzgeschwindigkeit herausbilden, die man wenigstens in erster Annäherung der treibenden elektrischen Kraft  $\mathfrak{E}$  proportional setzen kann; so wird das Ohmsche Gesetz verständlich.

Wird der Strom durch ein galvanisches Element oder einen Akkumulator erzeugt, so wird durch den sich abspielenden chemischen Prozeß zwischen Anfang und Ende der Drahtleitung eine konstante Potentialdifferenz recht erhalten, die »elektromotorische Kraft«. Da die Vorgänge, die in dem Stromerzeuger abspielen, offenbar nur von einer atomistischen Theorie verstanden werden können, ist es phänomenologisch am einfachsten, ihn durch einen Querschnitt im geschlossenen Leitungskreis Darstellung zu bringen, über den hinüber das Potential einen Sprung erleidet, welcher gleich der elektromotorischen Kraft ist.

Dieser kurze Überblick über die Maxwellsche Theorie des statischen Feldes wird uns für das Folgende genügen. Auf Einzelheiten und konkrete Anwendungen können wir uns hier natürlich nicht einlassen.

## Kapitel II.

## Riemannsche Geometrie.

§ 10. Bericht über Nicht-Euklidische Geometrie<sup>1)</sup>.

Der Zweifel an der Euklidischen Geometrie scheint so alt zu sein wie diese selbst und ist keineswegs erst, wie das von unsern Philosophen meist angenommen wird, eine Ausgeburt moderner mathematischer Hyperkritik. Dieser Zweifel hat sich von jeher an das *V. Postulat des Euklid* geknüpft. Es besagt im wesentlichen, daß in einer Ebene, in der eine Gerade  $g$  und ein nicht auf ihr gelegener Punkt  $P$  gegeben sind, nur eine einzige Gerade existiert, welche durch  $P$  hindurchgeht und  $g$  nicht schneidet; sie heißt die Parallele. Während die übrigen Axiome des Euklid ohne weiteres als evident zugestanden wurden, haben sich schon die ältesten Erklärer bemüht, diesen Satz auf Grund der übrigen Axiome zu beweisen. Heute, wo wir wissen, daß das gesteckte Ziel nicht erreicht werden konnte, müssen wir in diesen Betrachtungen die ersten Anfänge der »Nicht-Euklidischen« Geometrie erblicken, d. h. des Aufbaus eines geometrischen Systems, das zu seinen logischen Grundlagen die sämtlichen Axiome des Euklid mit Ausnahme des Parallelenpostulats annimmt. Wir besitzen von Proklus (5. Jahrh. n. Chr.) einen Bericht über derartige Versuche. Proklus warnt darin ausdrücklich vor dem Mißbrauch, der mit Berufungen auf Evidenz getrieben werden kann, (man darf nicht müde werden, diese Warnung zu wiederholen; man darf aber auch nicht müde werden, zu betonen, daß trotz ihres vielfachen Mißbrauchs die Evidenz letzter Ankergrund aller Erkenntnis ist, auch der empirischen) und besteht auf der Möglichkeit, daß es »asymptotische Gerade« geben könne.

Dazu mag man sich folgendes Bild machen. In einer Ebene sei eine feste Gerade  $g$ , ein nicht auf ihr gelegener Punkt  $P$  gegeben und eine durch  $P$  hindurchgehende, um  $P$  drehbare Gerade  $s$ . In ihrer Ausgangslage möge sie etwa senkrecht auf  $g$  sein. Drehen wir jetzt  $s$ , so gleitet der Schnittpunkt von  $s$  und  $g$  auf  $g$  entlang, z. B. nach rechts hinüber, und es tritt ein bestimmter Moment ein, wo dieser Schnittpunkt gerade ins Unendliche entschwinden ist: dann hat  $s$  die Lage einer »asymptotischen« Geraden. Drehen wir weiter, so nimmt Euklid an, daß im selben Moment schon ein Schnittpunkt von links her auftritt. Proklus dagegen weist auf die Möglichkeit hin, daß man vielleicht erst durch einen gewissen Winkel weiter drehen muß, ehe ein Schnittpunkt auf der linken Seite zustande kommt. Dann hätten wir zwei »asymptotische« Gerade, eine nach

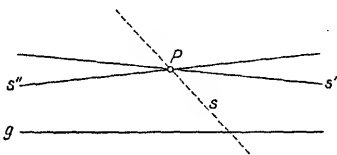


Fig. 2.

rechts  $s'$  und eine nach links  $s''$ . Liegt die Gerade  $s$  durch  $P$  in dem Winkelraum zwischen  $s''$  und  $s'$  (bei der eben geschilderten Drehung), so schneidet sie  $g$ ; liegt sie zwischen  $s'$  und  $s''$ , so schneidet sie nicht. — Eine nicht-schneidende muß mindestens existieren; das folgt aus den übrigen Axiomen Euklids.

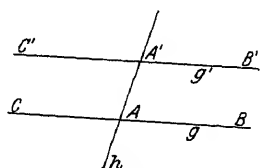


Fig. 3.

sich, da (s. Fig. 3)  $BAA'B'$  kongruent zu  $C'A'AC$  ist, auch auf der linken Seite ein solcher Schnittpunkt  $S^*$  ergeben; dies ist aber unmöglich, da durch zwei Punkte  $S$  und  $S^*$  nur eine einzige Gerade hindurchgeht.

Die Versuche, das Euklidische Postulat zu erweisen, setzen sich unter den Arabern und unter den abendländischen Mathematikern des Mittelalters fort. Wir nennen nur, sofort in die neuere Zeit hinüberspringend, die Namen der letzten bedeutendsten Vorläufer der Nicht-Euklidischen Geometrie: den Jesuitenpater Saccheri (Beginn des 18. Jahrh.), die Mathematiker Lambert und Legendre. Saccheri weiß, daß die Frage der Gültigkeit des Parallelenpostulats der andern äquivalent ist, ob die Winkelsumme im Dreieck gleich oder kleiner als  $180^\circ$  ist. Ist sie in einem Dreieck  $= 180^\circ$ , so ist sie es in jedem, und es gilt die Euklidische Geometrie; ist sie in einem Dreieck  $< 180^\circ$ , so ist sie in jedem Dreieck  $< 180^\circ$ . Daß sie  $> 180^\circ$  ausfällt, ist aus dem gleichen Grunde ausgeschlossen, aus dem eben gefolgert wurde, daß nicht alle Gerade durch  $P$  die feste Gerade  $g$  schneiden können. Lambert entdeckte, daß unter der Voraussetzung einer Winkelsumme  $< 180^\circ$  in der Geometrie eine ausgezeichnete Länge existiert; es hängt das eng mit der schon von Wallis gemachten Bemerkung zusammen, daß es in der Nicht-Euklidischen Geometrie (ganz so wie in der Geometrie auf einer festen Kugel) keine ähnlichen Figuren verschiedener Größe gibt: wenn es also so etwas gibt wie Gestalt unabhängig von Größe, so besteht die Euklidische Geometrie zu Recht. Außerdem leitete Lambert eine Formel für den Dreiecksinhalt her, aus welcher hervorgeht, daß dieser Inhalt in der Nicht-Euklidischen Geometrie nicht über alle Grenzen wachsen kann. Es scheint, daß sich durch die Untersuchungen dieser Männer allmählich in weiteren Kreisen der Glaube an die Unbeweisbarkeit des Parallelenpostulats Bahn gebrochen hat. Die Frage hat damals viele Gemüter bewegt; d'Alembert bezeichnete es als einen Skandal der Geometrie, daß sie noch immer nicht zur Entscheidung gebracht sei. Die Autorität Kants, dessen philosophische System die Euklidische Geometrie als apriorische, den Gehalt der reine

Raumanschauung in adäquaten Urteilen wiedergebende Erkenntnis in Anspruch nimmt, konnte den Zweifel nicht auf die Dauer unterdrücken.

Auch Gauß ist ursprünglich noch darauf aus gewesen, das Parallelenaxiom zu beweisen; doch hat er bald die Überzeugung gewonnen, daß dies unmöglich sei, und hat die Prinzipien einer Nicht-Euklidischen Geometrie, in welcher jenes Axiom nicht erfüllt ist, bis zu einem solchen Punkte entwickelt, daß von da ab der weitere Ausbau mit der nämlichen Leichtigkeit vollzogen werden kann wie der der Euklidischen Geometrie. Er hat aber über seine Untersuchungen nichts bekannt gegeben; er fürchtete, wie er später einmal in einem Privatbriefe schrieb, das »Geschrei der Böoter«; denn es gäbe nur wenige, welche verstünden, worauf es bei diesen Dingen eigentlich ankäme. Unabhängig von Gauß ist Schweikart, ein Professor der Jurisprudenz, zu vollem Einblick in die Verhältnisse der Nicht-Euklidischen Geometrie gelangt, wie aus einem knapp gehaltenen, an Gauß gerichteten Notizblatt hervorgeht. Er hielt es wie Gauß für keineswegs selbstverständlich und ausgemacht, daß in unserm wirklichen Raum die Euklidische Geometrie gilt. Sein Neffe Taurinus, den er zur Beschäftigung mit diesen Fragen anregte, war zwar im Gegensatz zu ihm ein Euklid-Gläubiger; ihm verdanken wir aber die Entdeckung, daß die Formeln der sphärischen Trigonometrie auf einer Kugel vom imaginären Radius  $\sqrt{-1}$  reell sind und durch sie auf analytischem Wege ein geometrisches System konstruiert ist, das den Axiomen des Euklid außer dem V. Postulat, diesem aber nicht genügt.

Vor der Öffentlichkeit müssen sich in den Ruhm, Entdecker und Erbauer der Nicht-Euklidischen Geometrie zu sein, teilen der Russe *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschewskij* (1793—1856), Professor der Mathematik in Kasan, und der Ungar *Johann Bolyai* (1802—1860), Offizier der österreichischen Armee. Beide kamen mit ihren Ideen um 1826 ins Reine; die Hauptschrift beider, die der Öffentlichkeit ihre Entdeckung mitteilte und eine Begründung der neuen Geometrie im Stile Euklids darbot, stammt aus den Jahren 1830/31. Die Darstellung bei Bolyai ist besonders durchsichtig dadurch, daß er die Entwicklung so weit als möglich führt, ohne über die Gültigkeit oder Ungültigkeit des V. Postulats eine Annahme zu machen und erst am Schluß aus den Sätzen dieser seiner »absoluten« Geometrie, je nachdem ob man sich für oder wider Euklid entscheidet, die Theoreme der Euklidischen und der Nicht-Euklidischen Geometrie herleitet.

Wenn so auch das Gebäude errichtet war, so war es noch immer nicht definitiv sichergestellt, ob sich schließlich nicht doch einmal in der absoluten Geometrie das Parallelenaxiom als ein Folgesatz herausstellen würde; der strenge *Beweis der Widerspruchslosigkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie* stand noch aus. Er ergab sich aber aus der Weiterentwicklung der Nicht-Euklidischen Geometrie fast wie von selbst. Der einfachste Weg zu diesem Beweis wurde freilich, wie das oft geschieht, nicht zuerst eingeschlagen; er ist erst von Klein um 1870 aufgefunden worden und

beruht auf der Konstruktion eines *Euklidischen Modells* für die Nicht-Euklidische Geometrie<sup>2)</sup>. Beschränken wir uns auf die Ebene! In einer Euklidischen Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten  $x, y$  zeichnen wir den Kreis  $U$  vom Radius 1 um den Koordinatenursprung. Führen wir homogene Koordinaten ein,

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

(so daß also die Lage eines Punktes durch das Verhältnis von drei Zahlen  $x_1 : x_2 : x_3$  charakterisiert ist), so lautet die Gleichung des Kreises

$$-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Die auf der linken Seite stehende quadratische Form werde mit  $\Omega(x)$  bezeichnet, die zugehörige symmetrische Bilinearform zweier Wertsysteme  $x_i, x'_i$  mit  $\Omega(x, x')$ . Eine Abbildung, die jedem Punkt  $x$  einen Bildpunkt  $x'$  durch die linearen Formeln

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} x_k \quad (|\alpha_{ik}| \neq 0)$$

zuordnet, heißt bekanntlich eine Kollineation (die affinen Abbildungen sind spezielle Kollineationen). Sie führt jede Gerade Punkt für Punkt wieder in eine Gerade über und läßt das Doppelverhältnis von 4 Punkten auf einer Geraden ungeändert. Wir stellen jetzt ein Lexikon auf, durch das die Begriffe der Euklidischen Geometrie in eine fremde Sprache, die »Nicht-Euklidische«, übersetzt werden, deren Worte wir durch Anführungsstriche kennzeichnen. Das Lexikon besteht nur aus drei Vokabeln.

»Punkt« heißt jeder Punkt im Innern von  $U$ .

»Gerade« heißt das innerhalb  $U$  verlaufende Stück einer Geraden.

Unter den Kollineationen, welche den Kreis  $U$  in sich überführen, gibt es zwei verschiedene Arten: solche, welche das Innere von  $U$  auf das Innere abbilden, und solche, die das Innere auf das Äußere abbilden. Die Kollineationen der ersten Art nennen wir »kongruente« Abbildungen und zwei aus »Punkten« bestehende Figuren »kongruent«, wenn sie durch eine solche Abbildung ineinander übergeführt werden können. Für diese »Punkte« und »Geraden« und für diesen Begriff der »Kongruenz« gelten die sämtlichen Axiome Euklids mit Ausnahme des Parallelen postulats. In Fig. 4 ist ein ganzes Bündel von »Geraden« durch den »Punkt«  $P$

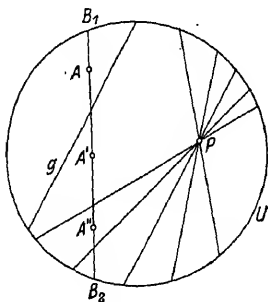


Fig. 4.

zeichnet, die alle die eine »Gerade«  $g$  nicht schneiden. Die Widerspruchslösigkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie ist damit erwiesen; denn sind Dinge und Beziehungen aufgewiesen, für welche bei geeigneter Namengebung die sämtlichen Sätze jener Geometrie erfüllt sind. —

Übertragung des Kleinschen Modells auf die räumliche Geometrie ist offenbar ohne weiteres möglich.

Wir wollen in diesem Modell noch die Nicht-Euklidische Entfernung zweier »Punkte«

$$A = (x_1 : x_2 : x_3), \quad A' = (x'_1 : x'_2 : x'_3)$$

bestimmen. Die Gerade  $AA'$  schneide den Kreis  $U$  in den beiden Punkten  $B_1, B_2$ . Die homogenen Koordinaten  $y_i$  jedes dieser beiden Punkte haben die Form

$$y_i = \lambda x_i + \lambda' x'_i,$$

und das zugehörige Parameterverhältnis  $\lambda : \lambda'$  ergibt sich aus der Gleichung  $\Omega(y) = 0$ :

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{-\Omega(xx') \pm \sqrt{\Omega^2(xx') - \Omega(x)\Omega(x')}}{\Omega(x)}.$$

Das Doppelverhältnis der vier Punkte  $AA'B_1B_2$  ist daher

$$[AA'] = \frac{\Omega(xx') + \sqrt{\Omega^2(xx') - \Omega(x)\Omega(x')}}{\Omega(xx') - \sqrt{\Omega^2(xx') - \Omega(x)\Omega(x')}}.$$

Diese von den beiden willkürlichen »Punkten«  $A, A'$  abhängige Größe ändert sich nicht bei einer »kongruenten« Abbildung. Sind  $AA'A''$  irgend drei, in der hingeschriebenen Reihenfolge auf einer »Geraden« gelegene »Punkte«, so ist

$$[AA''] = [AA'] \cdot [A'A''].$$

Die Größe

$$\frac{1}{2} \lg [AA'] = \overline{AA'} = r$$

hat also die Funktionaleigenschaft

$$\overline{AA'} + \overline{A'A''} = \overline{AA''}.$$

Da sie außerdem für »kongruente« Strecken  $AA'$  den gleichen Wert hat, ist sie als die Nicht-Euklidische Entfernung der beiden Punkte  $AA'$  anzusprechen. Indem wir unter  $\lg$  den natürlichen Logarithmus verstehen, erhalten wir in Einklang mit der Erkenntnis Lamberts eine absolute Festlegung der Maßeinheit. Die Definition läßt sich einfacher so schreiben:

$$(1) \quad \text{Cof } r = \frac{\Omega(xx')}{\sqrt{\Omega(x) \cdot \Omega(x')}}. \quad (\text{Cof} = \text{Cosinus hyperbolicus}).$$

Diese Maßbestimmung ist unter Zugrundelegung eines beliebigen reellen oder imaginären Kegelschnitts  $\Omega(x) = 0$  vor Klein bereits von Cayley als »projektive Maßbestimmung« aufgestellt worden<sup>3)</sup>; aber erst Klein erkannte, daß sie für einen reellen Kegelschnitt zur Nicht-Euklidischen Geometrie führt.

Man muß nicht wännen, das Kleinsche Modell zeige, daß die Nicht-Euklidische Ebene endlich sei. Vielmehr kann ich, Nicht-Euklidisch gemessen, auf einer »Geraden« dieselbe Strecke unendlich oft hintereinander abtragen; nur im *Euklidischen* Modell *Euklidisch* gemessen, werden die

Abstände dieser »äquidistanten« Punkte immer kleiner und kleiner. Für die Nicht-Euklidische Ebene ist der Grenzkreis  $U$  das unerreichbare Unendlichferne.

Die Cayleysche Maßbestimmung für einen imaginären Kegelschnitt führt auf die gewöhnliche sphärische Geometrie, wie sie auf einer Kugel im Euklidischen Raum Geltung hat. Die größten Kreise treten darin an Stelle der geraden Linien, es muß aber jedes aus zwei sich diametral gegenüberliegenden Punkten bestehende Punktepaar als einzelner »Punkt« betrachtet werden, damit sich zwei »Geraden« nur in einem »Punkte« schneiden. Wir projizieren die Kugelpunkte durch geradlinige Strahlen vom Zentrum auf die in einem Kugelpunkte, dem Südpol, gelegte Tangentenebene: in dieser Bildebene fallen alsdann je zwei diametral gegenüberliegende Punkte zusammen. Die Ebene müssen wir aber wie in der projektiven Geometrie mit einer unendlich fernen Geraden ausstatten, die das Bild des Äquatorkreises ist. Wir nennen zwei Figuren in dieser Ebene jetzt »kongruent«, wenn ihre durch die Zentralprojektion auf der Kugel entstehenden Bilder im gewöhnlichen Euklidischen Sinne kongruent sind. Unter Anwendung dieses »Kongruenz«-Begriffs gilt dann in der Ebene eine Nicht-Euklidische Geometrie, in der alle Axiome Euklids erfüllt sind mit Ausnahme des V. Postulats. An dessen Stelle tritt aber hier die Tatsache, daß je zwei Gerade ohne Ausnahme sich schneiden, und in Übereinstimmung damit ist die Winkelsumme  $> 180^\circ$ . Das scheint mit einem oben erwähnten Euklidischen Beweis in Widerspruch zu stehen. Die Antinomie löst sich dadurch, daß in der jetzigen, »sphärischen« Geometrie die Gerade eine geschlossene Linie ist, während Euklid, ohne es allerdings in den Axiomen auszusprechen, stillschweigend voraussetzt, daß sie eine offene Linie ist, nämlich durch jeden ihrer Punkte in zwei Hälften zerfällt. Nur unter dieser Voraussetzung ist der in seinem Beweis gezogene Schluß zwingend, daß der auf der »rechten« Seite gelegene hypothetische Schnittpunkt  $S$  von dem auf der »linken« Seite gelegenen  $S^*$  verschieden ist.

Wir benutzen im Raum ein Cartesisches Koordinatensystem  $x_1, x_2, x_3$ : dessen Nullpunkt im Kugelzentrum liegt, dessen  $x_3$ -Achse in die Verbindungslinie Nord-Südpol fällt und welchem als Maßeinheit der Kugelradius zugrunde liegt. Sind  $x_1, x_2, x_3$  die Koordinaten irgend eines Kugelpunktes

$$\Omega(x) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

so sind  $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$  die erste und zweite Koordinate des Bildpunktes unserer Ebene  $x_3 = 1$ ;  $x_1 : x_2 : x_3$  ist also das Verhältnis der homogenen Koordinaten des Bildpunktes. Kongruente Abbildungen der Kugel sind lineare Transformationen, welche die quadratische Form  $\Omega(x)$  invariant lassen; die »kongruenten« Abbildungen der Ebene im Sinne der »sphärischen« Geometrie sind also durch solche lineare Transformationen der homogenen Koordinaten gegeben, welche die Gleichung

$\Omega(x) = 0$ , die einen imaginären Kegelschnitt bedeutet, in sich überführen. Damit ist unsere Behauptung betreffs des Zusammenhanges der sphärischen Geometrie mit der Cayleyschen Maßbestimmung bewiesen. Im Einklang damit lautet die Formel für die Entfernung  $r$  zweier Punkte  $A, A'$  hier

$$(2) \quad \cos r = \frac{\Omega(x x')}{\sqrt{\Omega(x) \Omega(x')}}.$$

Zugleich haben wir die Entdeckung des Taurinus bestätigt, daß die Nicht-Euklidische Geometrie identisch ist mit der sphärischen auf einer Kugel vom Radius  $\sqrt{-1}$ .

Zwischen die Bolyai-Lobatschefskysche und die sphärische Geometrie schiebt sich als Grenzfall die Euklidische ein. Lassen wir nämlich einen reellen Kegelschnitt durch einen ausgearteten in einen imaginären übergehen, so verwandelt sich die mit der zugehörigen Cayleyschen Maßbestimmung ausgestattete Ebene von einer Bolyai-Lobatschefskyschen durch eine Euklidische hindurch in eine sphärische.

## § 11. Riemannsche Geometrie.

Die für uns vor allem bedeutsame Weiterentwicklung der Idee der Nicht-Euklidischen Geometrie durch Riemann knüpft an die Grundlagen der Infinitesimalgeometrie, insbesondere der Flächentheorie an, wie sie von Gauß in seinen *Disquisitiones circa superficies curvas* gelegt worden sind.

*Die ursprünglichste Eigenschaft des Raumes ist die, daß seine Punkte eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit bilden.* Was verstehen wir darunter? Wir sagen z. B., daß die Ellipsen (nach Größe und Gestalt, d. h. wenn man kongruente Ellipsen als gleich, nicht-kongruente als verschieden betrachtet) eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit bilden, weil die einzelne Ellipse innerhalb dieser Gesamtheit durch zwei Zahlangaben, den Wert der halben großen und kleinen Achse, festgelegt werden kann. Die Gleichgewichtszustände eines idealen Gases, deren Verschiedenheit etwa durch die Unabhängigen: Druck und Temperatur charakterisiert werde, bilden eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, ebenso die Punkte auf einer Kugel — oder die einfachen Töne nach Intensität und Qualität. Die Farben bilden gemäß der physiologischen Theorie, nach der die Farbwahrnehmung bestimmt ist durch die Kombination dreier chemischer Prozesse auf der Retina, des Schwarz-Weiß, Rot-Grün und Gelb-Blau-Prozesses, deren jeder in einer bestimmten Richtung mit bestimmter Intensität vor sich gehen kann, eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit nach Qualität und Intensität, die Farbqualitäten jedoch nur eine zweidimensionale; es findet dies seine Bestätigung durch die bekannte Maxwellsche Konstruktion des Farbdreiecks. Die möglichen Lagen eines starren Körpers bilden eine sechsdimensionale Mannigfaltigkeit, die möglichen Lagen eines mechanischen Systems von  $n$  Freiheitsgraden allgemein eine  $n$ -dimensionale. *Für eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist charakteristisch, daß man das einzelne zu ihr gehörige Element (in unsern Beispielen: die einzelnen Punkte oder*

Zustände, Farben oder Töne) festlegen kann durch die Angabe der Zahlenwerte von  $n$  Größen, den »Koordinaten«, die stetige Funktionen innerhalb der Mannigfaltigkeit sind. Dabei ist aber nicht erforderlich, zu verlangen, daß die ganze Mannigfaltigkeit mit allen ihren Elementen umkehrbar-eindeutig und stetig in dieser Weise durch die Wertsysteme von  $n$  Koordinaten repräsentiert werde (z. B. ist das ausgeschlossen für die Kugel,  $n = 2$ ), sondern es kommt nur darauf an, daß, wenn  $P$  ein beliebiges Element der Mannigfaltigkeit ist, jedesmal eine gewisse Umgebung der Stelle  $P$  umkehrbar-eindeutig und stetig auf die Wertsysteme von  $n$  Koordinaten abgebildet werden kann. Ist  $x_i$  ein System von  $n$  Koordinaten,  $x_i^*$  irgend ein anderes, so werden die Koordinatenwerte  $x_i$  und  $x_i^*$  desselben Elementes allgemein durch Relationen

$$(3) \quad x_i = f_i(x_1^* x_2^* \cdots x_n^*) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

miteinander verknüpft sein, die nach den  $x_i^*$  auflösbar sind und in denen die  $f_i$  stetige Funktionen ihrer Argumente bedeuten. Solange wir von der Mannigfaltigkeit nichts weiter wissen, sind wir nicht imstande, irgend ein Koordinatensystem vor den andern auszuzeichnen. Zur analytischen Behandlung beliebiger stetiger Mannigfaltigkeiten wird also eine Theorie der Invarianz gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen (3) nötig, während wir uns im vorigen Kapitel zur Durchführung der affinen Geometrie auf die viel speziellere Theorie der Invarianz gegenüber linearen Transformationen stützten.

Die Infinitesimalgeometrie beschäftigt sich mit dem Studium von Kurven und Flächen im dreidimensionalen Euklidischen Raum, der auf die Cartesischen Koordinaten  $x, y, z$  bezogen werde. Eine *Kurve* ist allgemein eine eindimensionale Punktmannigfaltigkeit; ihre einzelnen Punkte können durch die Werte eines Parameters  $u$  voneinander unterschieden werden. Befindet sich der Kurvenpunkt  $u$  an der Raumstelle mit den Koordinaten  $x, y, z$ , so werden  $x, y, z$  bestimmte stetige Funktionen von  $u$  sein:

$$(4) \quad x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u),$$

und (4) ist die »Parameterdarstellung« der Kurve. Deuten wir  $u$  mit der Zeit, so gibt (4) das Gesetz der Bewegung eines Punktes, welcher eine gegebene Kurve durchläuft. Durch die Kurve selbst ist aber die Parameterdarstellung (4) nicht eindeutig bestimmt; vielmehr kann der Parameter  $u$  noch einer beliebigen stetigen Transformation unterworfen werden.

Eine zweidimensionale Punktmannigfaltigkeit heißt *Fläche*; ihre Punkte können durch die Werte zweier Parameter  $u_1, u_2$  unterschieden werden, und sie besitzt daher eine Parameterdarstellung der Art:

$$(5) \quad x = x(u_1, u_2), \quad y = y(u_1, u_2), \quad z = z(u_1, u_2).$$

Wieder können die Parameter  $u_1, u_2$  noch einer beliebigen stetigen Transformation unterworfen werden, ohne daß die so dargestellte Fläche ändert. Wir wollen annehmen, daß die Funktionen in (5) nicht nur stetig, sondern auch stetig differenzierbar sind. Von dieser Darstellung (5)

beliebigen Fläche geht Gauß in seiner allgemeinen Theorie aus; die Parameter  $u_1, u_2$  bezeichnet man daher als Gaußsche (oder krummlinige) Koordinaten auf der Fläche. — Ein Beispiel: Projizieren wir wie im vorigen Paragraphen die Punkte der Einheitskugel um den Nullpunkt des Koordinatensystems vom Zentrum auf die Tangentenebene  $z = 1$  im Südpol, nennen  $x, y, z$  die Koordinaten eines beliebigen Kugelpunktes und  $u_1, u_2$  die  $x$ - und  $y$ -Koordinate des Projektionspunktes in dieser Ebene, so ist

$$(6) \quad x = \frac{u_1}{\sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2}}, \quad y = \frac{u_2}{\sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2}}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2}}.$$

Das ist eine Parameterdarstellung der Kugel; sie erfaßt jedoch nicht die ganze Kugel, sondern nur eine gewisse Umgebung des Südpols, nämlich die südliche Halbkugel bis zum Äquator, aber mit Ausschluß desselben. Eine andere Parameterdarstellung liefern die geographischen Koordinaten Länge und Breite.

In der Thermodynamik benutzen wir zur graphischen Darstellung eine Bildebene mit einem rechtwinkligen Koordinatenkreuz, in der wir den etwa durch Druck  $p$  und Temperatur  $\vartheta$  gegebenen Zustand eines Gases repräsentieren durch einen Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten  $p, \vartheta$ . Das gleiche Verfahren können wir hier anwenden: dem Punkt  $u_1 u_2$  auf der Fläche ordnen wir in einer »Bildebene« den Bildpunkt mit den rechtwinkligen Koordinaten  $u_1 u_2$  zu. Die Formeln (5) stellen dann nicht nur die Fläche, sondern gleichzeitig eine bestimmte stetige *Abbildung* dieser Fläche auf die  $u_1 u_2$ -Ebene dar. Beispiele solcher ebenen Abbildungen krummer Flächenstücke sind jedermann in den geographischen Karten geläufig. Eine Kurve auf der Fläche ist mathematisch gegeben durch eine Parameterdarstellung

$$(7) \quad u_1 = u_1(t), \quad u_2 = u_2(t),$$

ein Flächenstück durch ein »mathematisches Gebiet« in den Variablen  $u_1 u_2$ , das mittels Ungleichungen zwischen  $u_1, u_2$  charakterisiert werden muß; graphisch gesprochen also: durch die Bildkurve, bzw. das Bildgebiet in der  $u_1 u_2$ -Ebene. Bedeckt man die Bildebene nach Art des Millimeterpapiers mit einem Koordinatennetz, so überträgt sich dieses vermöge der Abbildung auf die krumme Fläche als ein aus kleinen parallelogrammatischen Maschen bestehendes Netz, das von den beiden Scharen von »Koordinatenlinien«  $u_1 = \text{konst.}$ , bzw.  $u_2 = \text{konst.}$  gebildet wird. Wird dies Raster hinreichend fein genommen, so ermöglicht es einem Zeichner, jede in der Bildebene gegebene Figur auf die krumme Fläche zu übertragen.

Der Abstand  $ds$  zweier unendlichnaher Punkte auf der Fläche:

$$(u_1, u_2) \quad \text{und} \quad (u_1 + du_1, u_2 + du_2)$$

bestimmt sich aus

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

wenn man darin

$$(8) \quad dx = \frac{\partial x}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} du_2$$

und entsprechende Ausdrücke für  $dy$ ,  $dz$  einsetzt. Es ergibt sich für  $ds^2$  eine quadratische Differentialform

$$(9) \quad ds^2 = \sum_{i,k=1}^2 g_{ik} du_i du_k \quad (g_{ki} = g_{ik}),$$

deren Koeffizienten

$$g_{ik} = \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial x}{\partial u_k} + \frac{\partial y}{\partial u_i} \frac{\partial y}{\partial u_k} + \frac{\partial z}{\partial u_i} \frac{\partial z}{\partial u_k}$$

im allgemeinen keine Konstante, sondern Funktionen von  $u_1, u_2$  sind. Für die Parameterdarstellung (6) der Kugel findet man z. B.

$$(10) \quad ds^2 = \frac{(1 + u_1^2 + u_2^2)(du_1^2 + du_2^2) - (u_1 du_1 + u_2 du_2)^2}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2}.$$

Gauß erkannte, daß diese metrische Fundamentalform bestimmend ist für die *Geometrie auf der Fläche*. Kurvenlängen, Winkel und die Größe gegebener Gebiete auf der Fläche hängen allein von ihr ab; die Geometrie auf zwei Flächen ist also dieselbe, wenn für sie bei geeigneter Parameterdarstellung die Koeffizienten  $g_{ik}$  der metrischen Fundamentalform übereinstimmen. Beweis: Die Länge einer beliebigen durch gegebenen Kurve auf der Fläche wird geliefert durch das Integral

$$\int ds = \int \sqrt{\sum_{ik} g_{ik} \frac{du_i}{dt} \frac{du_k}{dt}} \cdot dt.$$

Fassen wir einen bestimmten Punkt  $P^0 = (u_1^0, u_2^0)$  auf der Fläche ins Auge und benutzen für dessen unmittelbare Umgebung die relativen Koordinaten

$$u_i - u_i^0 = du_i; \quad x - x^0 = dx, \quad y - y^0 = dy, \quad z - z^0 = dz,$$

so gilt um so genauer, je kleiner  $du_1, du_2$ , die Gleichung (8), in der die Werte der Ableitungen an der Stelle  $P^0$  zu nehmen sind; wir sagen, es gilt für »unendlichkleine« Werte  $du_1$  und  $du_2$ . Fügen wir die analogen Gleichungen für  $dy, dz$  hinzu, so drücken sie aus, daß die unmittelbare Umgebung von  $P^0$  eine Ebene ist und  $du_1, du_2$  affine Koordinaten auf ihr\*). Demnach können wir in der unmittelbaren Umgebung von

\*) Dabei machen wir die Voraussetzung, daß die zweireihigen Determinanten, welche aus dem Koeffizientenschema dieser Gleichungen gebildet werden können,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \end{vmatrix},$$

nicht alle drei verschwinden; diese Bedingung ist für die regulären Punkte der Fläche in denen eine Tangentenebene existiert, erfüllt. Die drei Determinanten sind

die Formeln der affinen Geometrie anwenden. Wir finden für den Winkel  $\theta$  zweier Linienelemente oder infinitesimaler Verschiebungen mit den Komponenten  $du_1, du_2$ , bzw.  $\delta u_1, \delta u_2$ , wenn wir die zu (9) gehörige symmetrische Bilinearform

$$\sum_{ik} g_{ik} du_i \delta u_k \quad \text{mit} \quad Q(d\delta)$$

bezeichnen:

$$\cos \theta = \frac{Q(d\delta)}{\sqrt{Q(dd)Q(\delta\delta)}};$$

und für den Flächeninhalt des unendlichkleinen Parallelogramms, das von diesen beiden Verschiebungen aufgespannt wird,

$$\sqrt{g} \begin{vmatrix} du_1 & du_2 \\ \delta u_1 & \delta u_2 \end{vmatrix},$$

wenn  $g$  die Determinante der  $g_{ik}$  bedeutet. Der Inhalt eines krummen Flächenstücks ist demnach gegeben durch das über das Bildgebiet zu erstreckende Integral

$$\iint \sqrt{g} du_1 du_2.$$

Damit ist die Gaußsche Behauptung erwiesen. Die Werte der erhaltenen Ausdrücke sind natürlich unabhängig von der Wahl der Parameterdarstellung; diese ihre Invarianz gegenüber beliebigen Transformationen der Parameter kann analytisch ohne weiteres bestätigt werden. Alle geometrischen Verhältnisse auf der Fläche können wir im »Bilde« verfolgen; die Geometrie in der Bildebene fällt mit der Geometrie auf der krummen Fläche zusammen, wenn wir nur übereinkommen, unter dem Abstand  $ds$  zweier unendlich naher Punkte nicht den durch die Pythagoreische Formel

$$ds^2 = du_1^2 + du_2^2$$

gelieferten Wert zu verstehen, sondern (9).

Die Geometrie auf der Fläche handelt von den inneren Maßverhältnissen der Fläche, die ihr unabhängig davon zukommen, in welcher Weise sie in den Raum eingebettet ist; es sind diejenigen Beziehungen, welche durch *Messen auf der Fläche selbst* festgestellt werden können. Gauß ging bei seinen flächentheoretischen Untersuchungen von der praktischen geodätischen Arbeit der Hannoverschen Landesvermessung aus. Daß die Erde keine Ebene ist, kann durch die Vermessung eines hinreichend großen Stücks der Erdoberfläche selbst ermittelt werden; wenn auch das einzelne Dreieck des Triangulationsnetzes so klein genommen wird, daß an ihm die Abweichung von der Ebene nicht in Betracht fällt, so könnten sich doch die einzelnen Dreiecke nicht in der Weise in der Ebene zu einem Netz zusammenschließen, wie sie es auf der Erdoberfläche tun. Um das

und nur dann identisch 0, wenn die Fläche in eine Kurve ausartet, nämlich die Funktionen  $x, y, z$  von  $u_1$  und  $u_2$  in Wahrheit nur von *einem* Parameter, einer Funktion von  $u_1$  und  $u_2$ , abhängen.

spricht, nämlich  $= 4\pi \sin \frac{r}{2}$ . Damit ist durch Messung auf der Kugel festgestellt, daß sie keine Ebene ist. Nehme ich hingegen ein Papierblatt, auf das ich irgendwelche Figuren zeichne, und rolle es zusammen, so werde ich durch Ausmessen der Figuren auf dem zusammengerollten Blatt die gleichen Werte finden wie vorher, wenn das zusammengerollte Blatt mit keinen Verzerrungen verbunden war: auf ihm gilt genau die gleiche Geometrie wie in der Ebene; durch seine geodätische Vermessung bleibt ich außerstande, festzustellen, daß es gekrümmt ist. So gilt allgemein auf zwei Flächen, die durch Verbiegung ohne Verzerrung auseinander hervorgehen, die gleiche Geometrie.

$$\begin{array}{l|l} u_1 = u_1(u_1^* u_2^*) & u_1^* = u_1^*(u_1 u_2) \\ u_2 = u_2(u_1^* u_2^*) & u_2^* = u_2^*(u_1 u_2) \end{array}$$
$$(du_1^*)^2 + (du_2^*)^2$$
$$(II) \quad du_i^* = \alpha_{i1} du_1 + \alpha_{i2} du_2 \quad (i = 1, 2)$$

Krummlinige Koordinaten werden nicht nur in der Flächentheorie, sondern auch zur Behandlung räumlicher Probleme verwendet, nämlich in der mathematischen Physik, wo man häufig in die Notwendigkeit gesetzt ist, sich mit dem Koordinatensystem vorgegebenen Körpern anzupassen; ich erinnere an die Zylinder-, Kugel- und elliptische Koordinaten. Das Quadrat des Abstandes  $ds^2$  zweier unendlich benachbarten Punkte in einem räumlichen Gebiet, das durch die Koordinaten  $x, y, z$  beschrieben ist, hat die Form

Punkte im Raum wird bei Benutzung beliebiger Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  stets durch eine quadratische Differentialform

$$(12) \quad \sum_{i,k=1}^3 g_{ik} dx_i dx_k$$

ausgedrückt. Glauben wir an die Euklidische Geometrie, so sind wir überzeugt, daß jene Form sich durch Transformation in eine solche Gestalt überführen läßt, daß ihre Koeffizienten Konstante werden.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir imstande, die Riemannschen Ideen, die von ihm in seinem Habilitationsvortrag »Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen«<sup>4)</sup> in vollendeter Form entwickelt wurden, voll zu erfassen. Aus Kap. I ist zu ersehen, daß in einem vierdimensionalen Euklidischen Raum auf einem dreidimensionalen *linearen* Punktgebilde die Euklidische Geometrie gilt; aber krumme dreidimensionale Räume, die im vierdimensionalen Raum ebensogut existieren wie krumme Flächen im dreidimensionalen, sind von anderer Art. Ist es nicht möglich, daß unser dreidimensionaler Anschauungsraum ein solcher gekrümmter Raum ist? Freilich: er ist nicht eingebettet in einen vierdimensionalen; aber es könnte sein, daß seine inneren Maßverhältnisse solche sind, wie sie in einem »ebenen« Raum nicht stattfinden können; es könnte sein, daß eine sorgfältige geodätische Vermessung unseres Raumes in der gleichen Weise wie die geodätische Vermessung der Erdoberfläche ergäbe, daß er nicht eben ist. — Wir bleiben dabei, daß er eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist; wir bleiben dabei, daß sich unendlichkleine Linienelemente unabhängig von ihrem Ort und ihrer Richtung messend miteinander vergleichen lassen und daß das Quadrat ihrer Länge, des Abstandes zweier unendlich benachbarter Punkte bei Benutzung beliebiger Koordinaten  $x_i$  durch eine quadratische Differentialform (12) gegeben wird. (Diese Voraussetzung hat in der Tat allgemein ihren guten Sinn; denn da jede Transformation von einem auf ein anderes Koordinatensystem *lineare* Transformationsformeln für die Koordinatendifferentiale nach sich zieht, geht dabei eine quadratische Differentialform immer wieder in eine quadratische Differentialform über.) Was wir aber nicht mehr voraussetzen, ist, daß sich diese Koordinaten insbesondere als affine Koordinaten so wählen lassen, daß die Koeffizienten  $g_{ik}$  der Fundamentalform konstant werden.

Der Übergang von der Euklidischen zur Riemannschen Geometrie beruht im Grunde auf dem gleichen Gedanken wie die Nahwirkungs-Physik. Durch die Beobachtung stellen wir z. B. fest (Ohmsches Gesetz), daß der in einem Leitungsdraht fließende Strom proportional ist zu der Potentialdifferenz am Anfang und Ende der Leitung. Aber wir sind überzeugt, daß wir nicht in diesem auf einen langen Draht sich beziehenden Messungsergebnis das allgemein gültige exakte Naturgesetz vor uns haben, sondern dieses aus jenem sich herleitet, indem wir das Ohmsche Gesetz, so wie es aus den Messungen abgelesen wird, auf ein *unendlichkleines*

Drahtstück anwenden. Dann kommen wir zu jener Formulierung (Kap. I, S. 68), die der Maxwell'schen Theorie zugrunde gelegt wird. Aus dem Differentialgesetz folgt rückwärts auf mathematischem Wege *unter Voraussetzung überall homogener Verhältnisse* das Integralgesetz, das wir direkt durch die Beobachtung feststellen. Genau so hier: Die Grundtatsache der Euklidischen Geometrie ist, daß das Quadrat der Entfernung zweier Punkte eine quadratische Form der relativen Koordinaten der beiden Punkte ist (*Pythagoreischer Lehrsatz*). *Sehen wir aber dieses Gesetz nun dann als streng gültig an, wenn jene beiden Punkte unendlich benachbart sind, so kommen wir zur Riemannschen Geometrie*; zugleich sind wir dann einer genaueren Festlegung des Koordinatenbegriffs überhoben, da das gefaßte Pythagoreische Gesetz invariant ist gegenüber beliebigen Transformationen. Es entspricht der Übergang von der Euklidischen »Fern« zur Riemannschen »Nahe«-Geometrie demjenigen von der Fernwirkung zur Nahewirkungs-Physik; die Riemannsche Geometrie ist die dem Gesetz der Kontinuität gemäß formulierte Euklidische, sie nimmt aber durch diese Formulierung sogleich einen viel allgemeineren Charakter an. Euklidische Fern-Geometrie ist geschaffen für die Untersuchung der geraden Linie und der Ebene, an diesen Problemen hat sie sich orientiert; so man aber zur Infinitesimalgeometrie übergeht, ist es das Natürlichste und Vernünftigste, den infinitesimalen Ansatz Riemanns zugrunde zu legen; es wird dadurch keine Komplikation bedingt, und man ist vor unangemessenen, fern-geometrischen Überlegungen geschützt. Auch im Riemannschen Raum ist eine Fläche als zweidimensionale Mannigfaltigkeit (als eine Parameterdarstellung  $x_i = x_i(u_1, u_2)$ ) gegeben; setzen wir die daraus sich ergebenden Differentiale

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_i}{\partial u_2} du_2$$

in die metrische Fundamentalform (12) des Riemannschen Raumes ein, so bekommen wir für das Quadrat des Abstandes zweier unendlich benachbarter Flächenpunkte eine quadratische Differentialform von derselben Form (wie im Euklidischen Raum): die Metrik des dreidimensionalen Riemannschen Raumes überträgt sich unmittelbar auf jede in ihm gelegene Fläche und macht sie damit zu einem zweidimensionalen Riemannschen Raum. Während also bei Euklid der Raum von vornherein von viel spezieller Natur angenommen ist als die in ihm möglichen Flächen, nähert sich bei Riemann der Raumbegriff gerade denjenigen der allgemeinen Geometrie an. — *Das Prinzip, die Welt aus ihrem Verhalten im unendlichkleinen zu verstehen*, ist das treibende erkenntnistheoretische Prinzip der Nahewirkungsphysik wie der Riemannschen Geometrie, ist also das treibende Motiv in dem übrigen, vor allem auf die komplemententheorie gerichteten grandiosen Lebenswerk Riemanns. Es scheint uns die Frage nach der Gültigkeit des »V. Postulats«,

die historische Entwicklung, an die Euklidischen »Elemente« anknüpfend, ausgegangen ist, nur als ein bis zu einem gewissen Grade zufälliger Ansatzpunkt. Die wahre Erkenntnis, zu der man sich erheben mußte, um über den Euklidischen Standpunkt hinauszugelangen, glauben wir, ist uns von Riemann aufgedeckt worden.

Wir müssen uns noch davon überzeugen, daß die Bolyai-Lobatschefsky'sche Geometrie so gut wie die Euklidische und die sphärische (auf die als eine Nicht-Euklidische Möglichkeit übrigens erst Riemann hingewiesen hat) als spezielle Fälle in der Riemannschen enthalten sind. In der Tat, benutzen wir als Koordinaten eines Punktes der Bolyai-Lobatschefskyschen Ebene die rechtwinkligen Koordinaten  $u_1, u_2$  jenes Bildpunktes, der ihm in dem Kleinschen Modell entspricht, so ergibt sich für den Abstand  $ds$  zweier unendlich benachbarter Punkte aus (1):

$$(13) \quad ds^2 = \frac{(1 - u_1^2 - u_2^2)(du_1^2 + du_2^2) + (u_1 du_1 + u_2 du_2)^2}{(1 - u_1^2 - u_2^2)^2}.$$

Der Vergleich mit (10) bestätigt wiederum den Satz von Taurinus. Die metrische Fundamentalform des dreidimensionalen Nicht-Euklidischen Raumes lautet genau entsprechend.

Wenn wir im Euklidischen Raum eine krumme Fläche herstellen können, für die bei Benutzung geeigneter Gaußscher Koordinaten  $u_1, u_2$  die Formel (13) gültig ist, so besteht auf ihr die Bolyai-Lobatschefsky'sche Geometrie. Solche Flächen kann man sich in der Tat verschaffen; die einfachste ist die Umdrehungsfläche der Traktrix. Die Traktrix ist eine ebene Kurve von der nebenstehenden Gestalt, mit einer Spitze und einer Asymptote; sie ist geometrisch dadurch charakterisiert, daß die Tangente vom Berührungspunkt bis zum Schnitt mit der Asymptote eine konstante Länge besitzt. Man lasse sie um ihre Asymptote rotieren: auf der entstehenden Drehfläche gilt die Nicht-Euklidische Geometrie. Dieses durch seine Anschaulichkeit ausgezeichnete Euklidische Modell derselben ist zuerst von Beltrami angegeben<sup>5)</sup>. Es leidet freilich an gewissen Übelständen; es ist erstens (in dieser anschaulichen Form) auf die zweidimensionale Geometrie beschränkt, und zweitens realisiert jede der beiden Hälften der Umdrehungsfläche, in welche sie durch ihre scharfe Kante zerfällt, nur einen Teil der Nicht-Euklidischen Ebene. Von Hilbert wurde streng bewiesen, daß eine singularitätenfreie Fläche im Euklidischen Raum, welche die ganze Lobatschefskysche Ebene realisiert, nicht vorhanden sein kann<sup>6)</sup>. Beide Übelstände besitzt das elementargeometrische Kleinsche Modell nicht.



Fig. 5.

Bislang sind wir rein spekulativ vorgegangen und ganz in der Domäne des Mathematikers geblieben. Ein anderes ist aber die Widerspruchslösung der Nicht-Euklidischen Geometrie, ein anderes *die Frage, ob sie oder die Euklidische im wirklichen Raume Gültigkeit besitzt*. Schon Gauß hat

zur Prüfung dieser Frage das Dreieck Inselsberg, Brocken, Hoher Hagen (bei Göttingen) mit großer Sorgfalt gemessen, aber die Abweichung der Winkelsumme von  $180^\circ$  innerhalb der Fehlergrenzen gefunden. Lobatschewsky schloß aus dem geringen Betrag der Fixsternparallaxen, daß die Abweichung des wirklichen Raumes vom Euklidischen außerordentlich gering sein müsse. Auf philosophischer Seite ist der Standpunkt vertreten worden, daß durch empirische Beobachtungen die Gültigkeit oder Ungültigkeit der Euklidischen Geometrie nicht erwiesen werden könne. Und in der Tat muß zugestanden werden, daß bei allen solchen Beobachtungen wesentlich physikalische Voraussetzungen, wie etwa die, daß die Lichtstrahlen gerade Linien sind, und dgl., eine Rolle spielen. Wir finden damit aber lediglich eine schon oben gemachte Bemerkung bestätigt, daß nur das Ganze von Geometrie und Physik einer empirischen Nachprüfung fähig ist. Entscheidende Experimente sind also erst da möglich, wenn nicht nur die Geometrie, sondern auch die Physik vom Euklidischen und im allgemeinen Riemannschen Raum entwickelt wird. Wir werden bald sehen, daß es auf sehr einfache und völlig willkürliche Weise gelingt, beispielsweise die Gesetze des elektromagnetischen Feldes, die zunächst nur unter der Voraussetzung der Euklidischen Geometrie aufgestellt sind, auf den Riemannschen Raum zu übertragen. Ist dies aber geschehen, so kann sehr wohl die Erfahrung darüber entscheiden, ob der spezielle Euklidische Standpunkt aufrecht zu erhalten ist oder ob wir zu dem allgemeineren Riemannschen übergehen müssen. Wir sehen aber, daß für uns an dem Punkte, an dem wir jetzt stehen, diese Frage noch nicht spruchreif ist.

Zum Schluß stellen wir noch einmal die Grundlagen der Riemannschen Geometrie in geschlossener Formulierung und unter Abstreichung der speziellen Dimensionszahl  $n = 3$  vor Augen.

*Ein  $n$ -dimensionaler Riemannscher Raum ist eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit; aber nicht eine beliebige, sondern eine solche, der durch eine positiv-definite quadratische Differentialform eine Maßbestimmung aufgegeben ist. Die beiden Hauptgesetze, nach denen jene Form die Maßbestimmung festlegt, sind die folgenden (die  $x_i$  bedeuten irgendwelche Koordinaten).*

1. Ist  $g$  die Determinante der Koeffizienten der Fundamentalform, so ist die Größe irgend eines Raumstücks gegeben durch das Integral

$$(14) \quad \int \sqrt{g} dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

das zu erstrecken ist über dasjenige mathematische Gebiet der Variablen, welches dem Raumstück entspricht.

2. Bedeutet  $Q(d\delta)$  die der quadratischen Fundamentalform entsprechende symmetrische Bilinearform zweier an derselben Stelle befindlichen Linienelemente  $d$  und  $\delta$ , so ist der von ihnen gebildete Winkel berechnen aus

$$(15) \quad \cos \theta = \frac{Q(d\delta)}{\sqrt{Q(dd) \cdot Q(\delta\delta)}}.$$

Eine in dem  $n$ -dimensionalen Raum liegende  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ( $1 \leq m \leq n$ ) ist gegeben durch eine Parameterdarstellung:

$$x_i = x_i(u_1, u_2, \dots, u_m) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Aus der metrischen Fundamentalform des Raumes entsteht durch Einsetzen der Differentiale

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_i}{\partial u_2} du_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial u_m} du_m$$

die metrische Fundamentalform dieser  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit; sie ist damit selber ein Riemannscher  $m$ -dimensionaler Raum, und die Berechnung der Größe eines beliebigen Stücks von ihr geschieht nach der auf sie übertragenen Formel (14). So kann die Länge von Linienstücken, der Inhalt von Flächenstücken usw. ermittelt werden.

## § 12. Fortsetzung. Dynamische Auffassung der Metrik.

Wir kehren noch einmal zur Flächentheorie im Euklidischen Raum zurück. Die *Krümmung* einer ebenen Kurve kann als Maß dafür, wie stark die Kurvennormalen divergieren, in folgender Weise definiert werden. Wir tragen den zur Kurve in einem beliebigen Punkte  $P$  senkrecht stehenden Vektor »Normale« von der Länge 1 von einem festen Punkt  $O$  aus ab:  $Op$ , und erhalten dadurch einen Bildpunkt  $p$  zu  $P$  auf dem Einheitskreis um  $O$ . Durchläuft  $P$  ein kleines Bogenstück  $\Delta s$  der Kurve, so wird der Bildpunkt  $p$  einen Bogen  $\Delta \sigma$  jenes Kreises durchlaufen;  $\Delta \sigma$  ist der ebene Winkel, welchen die in den sämtlichen Punkten des Kurvenbogens errichteten Normalen miteinander bilden.

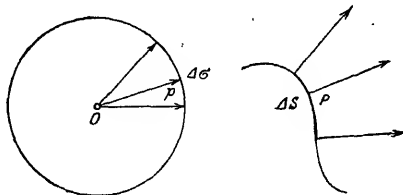


Fig. 6.

Der Limes des Quotienten  $\frac{\Delta \sigma}{\Delta s}$  für ein Bogenstück  $\Delta s$ , das auf einen Punkt  $P$  zusammenschrumpft, ist die Krümmung in  $P$ . Ganz analog definiert Gauß die Krümmung einer Fläche als Maß der Divergenz ihrer Normalen. Anstelle des Einheitskreises um  $O$  tritt die Einheitskugel; einem kleinen Flächenstück  $d\omega$  entspricht durch das gleiche Abbildungsprinzip ein Stück dieser Kugel  $d\omega$ ;  $d\omega$  ist gleich dem räumlichen Winkel, welchen die in den Punkten von  $d\omega$  errichteten Normalen miteinander bilden. Das Verhältnis  $\frac{d\omega}{d\omega}$  in der Grenze für unendlichkleines  $d\omega$  ist die *Gaußsche Krümmung*.

Gauß machte die wichtige Entdeckung, daß diese Krümmung durch die inneren Maßverhältnisse der Fläche allein bestimmt ist und aus den Koeffizienten der metrischen Fundamentalform als ein Differential-

ausdruck 2. Ordnung berechnet werden kann. Die Krümmung bleibt demnach ungeändert, wenn man die Fläche verbiegt, ohne sie zu verzerren. Damit war auf geometrischem Wege eine *Differentialinvariante der quadratischen Differentialformen* von zwei Variablen entdeckt, eine Größe nämlich, die aus den Koeffizienten der Differentialform in solcher Weise gebildet ist, daß sie für zwei Differentialformen, die durch Transformation auseinander hervorgehen (und für Argumentpaare, die sich durch die Transformation entsprechen) gleiche Werte besitzt.

Riemann gelang es, den Begriff der Krümmung auf quadratische Differentialformen von drei und mehr Variablen zu übertragen; es stellte sich heraus, daß sie dann kein Skalar mehr ist, sondern ein Tensor (mit dem wir uns in § 16 dieses Kapitels beschäftigen werden). Genauer verhält es sich so, daß ein Riemannscher Raum an jeder Stelle in jeder Flächenrichtung eine bestimmte Krümmung besitzt. Der Euklidische Raum ist dadurch charakterisiert, daß er überall und in jeder Richtung die Krümmung 0 besitzt. Für die Bolyai-Lobatschewskysche wie für die sphärische Geometrie aber besitzt die Krümmung einen von Ort und Flächenrichtung unabhängigen konstanten Wert  $a$ ; und zwar einen positiven im Falle der sphärischen, einen negativen im Falle der Bolyai-Lobatschewskyschen Geometrie (sie kann also, wenn die Einheit des Längenmaßes geeignet gewählt wird,  $= \pm 1$  angenommen werden). Hat der  $n$ -dimensionale Raum die konstante Krümmung  $a$ , so hat seine metrische Fundamentalform bei Einführung geeigneter Koordinaten  $x_i$  notwendig die Gestalt

$$\frac{\left(1 + a \sum_i x_i^2\right) \cdot \sum_i dx_i^2 - a \left(\sum_i x_i dx_i\right)^2}{\left(1 + a \sum_i x_i^2\right)^2};$$

sie ist also vollständig eindeutig bestimmt. Ist der Raum überall in allen Richtungen homogen, so muß seine Krümmung eine Konstante sein und seine metrische Fundamentalform demnach die angegebene Gestalt besitzen: ein solcher Raum ist notwendig Euklidisch, sphärisch oder Lobatschewskysch. Unter diesen Umständen haben nicht nur die Linielemente eine von Ort und Richtung unabhängige Existenz, sondern eine beliebige, endlich ausgedehnte Figur kann kongruent ohne Änderung ihrer Maßverhältnisse an einen beliebigen Ort verpflanzt und in eine beliebigen Richtung gestellt werden. Damit kehren wir zu dem Begriff der kongruenten Abbildung zurück, von dem unsere Betrachtungen über den Raum in § 1 ihren Ausgang nahmen. Innerhalb der drei möglichen Fälle ist der Euklidische dadurch charakterisiert, daß sich aus der Gruppe der kongruenten Abbildungen die Gruppe der Translationen mit den besonderen, in § 1 auseinandergesetzten Eigenschaften heraushebt. In den hier zusammengestellten Tatsachen sind in Riemanns Vortrag kurz erwähnt, von Christoffel, Lipschitz, Helmholtz und Sophus Lie eingehend begründet worden.<sup>7)</sup>

Der Raum ist Form der Erscheinungen und, sofern er das ist, notwendig homogen. Damit scheint es, als ob aus der ganzen Fülle der möglichen Geometrien, welche der Riemannsche Begriff umfaßt, von vornherein nur die erwähnten drei speziellen Fälle in Betracht kämen und alle übrigen als bedeutungslos unbesehen fallen gelassen werden müßten: *parturiunt montes, nascetur ridiculus mus!* Riemann dachte darüber anders, die Schlußworte seines Vortrags geben darüber Auskunft. Sie konnten von seinen Zeitgenossen in ihrer Tragweite nicht verstanden werden und sind damals ungehört verhallt. Erst heute, nachdem uns Einstein durch seine Gravitationstheorie die Augen geöffnet hat, sehen wir, was eigentlich dahinter steckt. Zu ihrem Verständnis bemerke ich vorweg, daß Riemann dort den *kontinuierlichen* Mannigfaltigkeiten die *diskreten*, aus einzelnen isolierten Elementen bestehenden gegenüberstellt. Das Maß eines jeden Teiles einer solchen Mannigfaltigkeit ist durch die *Anzahl* der zu ihm gehörigen Elemente gegeben. So trägt eine diskrete Mannigfaltigkeit zufolge des Anzahlbegriffs das Prinzip ihrer Maßbestimmung, wie Riemann sagt, *a priori* in sich. Nun zu Riemanns eigenen Worten:

»Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem innern Grunde der Maßverhältnisse des Raumes. Bei dieser Frage, welche wohl noch zur Lehre vom Raum gerechnet werden darf, kommt die obige Bemerkung zur Anwendung, daß bei einer diskreten Mannigfaltigkeit das Prinzip der Maßverhältnisse schon in dem Begriffe dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anders woher hinzukommen muß. Es muß also entweder das dem Raume zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Maßverhältnisse außerhalb, *in darauf wirkenden bindenden Kräften*, gesucht werden.

»Die Entscheidung dieser Fragen kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu Newton den Grund gelegt, ausgeht und diese, durch Tatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben, allmählich umarbeitet; solche Untersuchungen, welche wie die hier geführte von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur dazu dienen, daß diese Arbeit nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhangs der Dinge nicht durch überlieferte Vorurteile gehemmt wird.

»Es führt dies hinüber in das Gebiet einer anderen Wissenschaft, in das Gebiet der Physik, welches wohl die Natur der heutigen Veranlassung nicht zu betreten erlaubt.« —

Sehen wir von der ersten Möglichkeit ab, es könnte »das dem Raume zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden« — obschon wir es durchaus nicht abschwören wollen, heute im Angesicht der Quantentheorie weniger denn je, daß darin vielleicht einmal die endgültige Lösung des Raumproblems gefunden werden kann —, so leugnet Riemann also, was bis dahin immer die Meinung gewesen war,

daß die Metrik des Raumes von vornherein unabhängig von den physikalischen Vorgängen, deren Schauplatz er abgibt, festgelegt sei und das Reale in diesen metrischen Raum wie in eine fertige Mietskaserne einziehe; er behauptet vielmehr, daß der Raum an sich nichts weiter als eine völlig formlose dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist und erst der den Raum erfüllende materiale Gehalt ihn gestaltet und seine Maßverhältnisse bestimmt. Es bleibt die Aufgabe, zu ermitteln, nach welchen Gesetzen dies geschieht; jedenfalls aber wird sich die metrische Fundamentalforn im Laufe der Zeit ändern, wie sich das Materiale in der Welt ändert. Wir wollen diesen kühnen Gedanken etwas genauer erläutern und zeigen, daß, wenn diese Ansicht zutrifft, irgend zwei Raumstücke, die durch stetige Deformation ineinander übergeführt werden können, als kongruent bezeichnet werden müssen in dem von uns zugrunde gelegten Sinne, da derselbe materiale Gehalt so gut das eine Raumstück wie das andere erfüllen kann.

Zur Vereinfachung unserer prinzipiellen Auseinandersetzung nehmen wir an, daß das Materiale allein durch skalare Zustandsgrößen wie Massendichte, Ladungsdichte usw. beschrieben werden kann. Wir fassen einen bestimmten Moment ins Auge; in ihm wird die Ladungsdichte  $\rho$  z. B. bei Zugrundelegung eines bestimmten räumlichen Koordinatensystems eine bestimmte Funktion  $f(x_1, x_2, x_3)$  der Koordinaten  $x_i$  sein, bei Benutzung eines andern Koordinatensystems  $x_i^*$  aber durch eine andere Funktion  $f^*(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  dargestellt werden. — Eine Zwischenbemerkung. Es springt bei Anfängern daraus oft Verwirrung, daß sie nicht beachten: In der mathematischen Literatur werden die Buchstaben durchweg zur Bezeichnung der Funktionen benutzt, in der physikalischen und auch mathematisch-physikalischen durchweg zur Bezeichnung der »Größen«. gebraucht man in der Thermodynamik etwa für die Energie eines Gases einen bestimmten Buchstaben, sagen wir  $E$ , einerlei ob man sie als Funktion von Druck  $p$  und Temperatur  $\vartheta$  oder als Funktion des Volumens  $v$  und der Temperatur  $\vartheta$  auffaßt. Der Mathematiker aber schreibt mit zwei verschiedenen Zeichen:

$$E = \Phi(p, \vartheta) = \Psi(v, \vartheta).$$

Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial \Phi}{\partial p}, \frac{\partial \Psi}{\partial v}$ , die eine ganz verschiedene Bedeutung haben, treten infolgedessen in den Physikbüchern unter der gemeinsamen Bezeichnung  $\frac{\partial E}{\partial \vartheta}$  auf; es muß dann aber durch einen angehängten Index (nach dem Vorgang von Boltzmann) oder durch hinzugefügte Worte angegeben werden, daß im einen Falle bei der Differentiation  $v$  im andern Falle  $p$  konstant gehalten wird. Die mathematische Symbolik ist ohne solchen Zusatz eindeutig\*). — Wir legen weiter, obschon

\*) Es soll hier natürlich an der »physikalischen« Bezeichnungsart durchaus Kritik geübt werden; sie ist den Zwecken der mit Größen operierenden Physik unangemessen.

die Dinge in Wirklichkeit komplizierter verhalten, eine möglichst einfache geometrische Optik zugrunde, deren Grundgesetz besagt: der Lichtstrahl von einem Licht aussendenden Punkt  $M$  zu einem Beobachter in  $P$  ist eine »geodätische« Linie, die unter allen Verbindungslinien von  $M$  mit  $P$  die geringste Länge besitzt; von der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes sehen wir ganz ab. Dem auffassenden Bewußtsein schreiben wir lediglich ein optisches Wahrnehmungsvermögen zu und vereinfachen es uns zu einem »Punktauge«, das die Richtungsunterschiede der auftreffenden Lichtstrahlen, welche durch die aus (15) zu bestimmten Winkel  $\theta$  gegeben werden, unmittelbar wahrnimmt und dadurch ein *Richtungsbild* der umgebenden Gegenstände gewinnt (wir ignorieren die Qualitäten der Farbe). Nicht nur die Wirkung der physischen Dinge aufeinander, sondern auch die psychophysische Wechselwirkung wird von dem Gesetz der Kontinuität beherrscht: die Richtung, in der wir Gegenstände wahrnehmen, ist nicht durch deren Ort bestimmt, sondern durch die Richtung des von ihnen auf der Netzhaut auftreffenden Lichtstrahles; also durch den Zustand des optischen Feldes in der unmittelbaren Berührung mit dem Leibe jenes rätselhaften Realen, in dessen Wesen es liegt, daß ihm eine gegenständliche Welt in Bewußtseinserlebnissen »erscheint«. Daß aber ein materialer Gehalt  $G$  derselbe ist wie der materiale Gehalt  $G'$ , kann offenbar nichts anderes heißen, als daß zu jedem Standpunkt  $P$  gegenüber  $G$  ein Standpunkt  $P'$  gegenüber  $G'$  gehört (und umgekehrt) derart, daß ein Beobachter in  $P'$  von  $G'$  das gleiche Richtungsbild empfängt, wie es ein Beobachter in  $P$  von  $G$  erhält.

Wir legen ein bestimmtes Koordinatensystem  $x_i$  zugrunde; die skalaren Zustandsgrößen wie die Elektrizitätsdichte  $\varrho$  stellen sich dar durch bestimmte Funktionen

$$\varrho = f(x_1 x_2 x_3),$$

die metrische Fundamentalform sei

$$\sum_{i,k=1}^3 g_{ik} dx_i dx_k,$$

wo die  $g_{ik}$  gleichfalls (im Sinne der »mathematischen« Bezeichnungsweise) bestimmte Funktionen von  $x_1 x_2 x_3$  bedeuten. Ferner sei irgend eine stetige Abbildung des Raumes auf sich selber gegeben, durch die jedem Punkt  $P$  ein Punkt  $P'$  zugeordnet ist. Unter Benutzung des vorliegenden Koordinatensystems und der Bezeichnungen

$$P = (x_1 x_2 x_3), \quad P' = (x'_1 x'_2 x'_3)$$

werde diese Abbildung dargestellt durch

$$(16) \quad x'_i = \varphi_i(x_1 x_2 x_3).$$

Durch sie gehe ein Raumstück  $\mathfrak{S}$  über in  $\mathfrak{S}'$ ; ich will zeigen, daß in dem erläuterten Sinne  $\mathfrak{S}'$  kongruent  $\mathfrak{S}$  ist, falls Riemanns Ansicht zutrifft.

Ich benutze ein zweites Koordinatensystem, indem ich dem Punkte  $P$  die durch (16) gegebenen Zahlen  $x'_i$  als seine Koordinaten zuordne; (16)

sind dann die Transformationsformeln. Derjenige mathematische Bereich in drei Variablen, als welcher sich  $\mathcal{S}$  in den Koordinaten  $x'$  darstellt, ist identisch mit demjenigen, als welcher sich  $\mathcal{S}'$  in den Koordinaten  $x$  darstellt. Ein beliebiger Punkt  $P$  hat in  $x'$  die gleichen Koordinaten wie  $P'$  in  $x$ . Ich denke mir nun den Raum auf eine zweite Weise durch einen materialen Gehalt erfüllt, und zwar so, wie es durch die Formel

$$\varrho = f(x'_1 x'_2 x'_3) \quad \text{im Punkte } P$$

und die analogen für die übrigen skalaren Größen dargestellt wird. Wenn die Maßbestimmung des Raumes unabhängig von dem erfüllenden Materialen vorgegeben ist, wird die metrische Fundamentalform wie bei der ersten Erfüllung den Ausdruck haben:

$$\sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k = \sum_{ik} g'_{ik}(x'_1 x'_2 x'_3) dx'_i dx'_k;$$

dabei ist auf der rechten Seite die Transformation auf das zweite Koordinatensystem vollzogen. Wenn aber die Maßverhältnisse durch den materialen Gehalt bestimmt werden — und wir wollen jetzt mit Riemann annehmen, daß sich die Sache so verhält —, so wird, da die zweite Erfüllung sich genau so in den Koordinaten  $x'$  ausdrückt wie die erste in den Koordinaten  $x$ , bei dieser zweiten Erfüllung die metrische Fundamentalform lauten:

$$\sum_{ik} g_{ik}(x'_1 x'_2 x'_3) dx'_i dx'_k.$$

Nach unserem Prinzip der geometrischen Optik wird dann einem Beobachter in  $P'$  der im Raumstück  $\mathcal{S}'$  bei der ersten Erfüllung vorhandene Gehalt genau so erscheinen wie einem Beobachter in  $P$  das gemäß der zweiten Erfüllung im Raumstück  $\mathcal{S}$  vorhandene Materiale. Trifft jedoch die alte »Mietskasernen«-Auffassung zu, so ist das natürlich nicht der Fall.

Die einfache Tatsache, daß ich eine Plastelinkugel in meiner Hand zu einer beliebigen Mißgestalt zerdrücken kann, die ganz anders aussieht als eine Kugel, scheint den Riemannschen Standpunkt ad absurdum zu führen. Dies ist jedoch nicht beweisend; denn es wird wohl, wenn Riemann recht hat, u. a. eine ganz andere Deformation der inneren atomistischen Struktur des Plastelins nötig sein, als ich durch meine Hand bewirken kann, damit die verdrückte Gestalt einem Beobachter von allen Seiten als kugelförmig erscheint.\*) Einstein hat dem Riemannschen Gedanken zum Siege verholfen (ohne freilich direkt durch Riemann beeinflusst zu sein), von dem durch Einstein gewonnenen Standpunkt rückschauend aber kennen wir, daß dieser Gedanke zu einer gültigen Theorie erst ausgearbeitet werden konnte, nachdem die Zeit als vierte zu den drei Raumdimensionen in solcher Weise hinzugetreten war, wie es die sog. spezielle Relativitätstheorie lehrt. Da der Begriff »Kongruenz« nach Riemann überhaupt keiner Metrik führt, auch nicht zu der durch eine quadratische Differen-

\*) Genauerer hierüber in Kap. IV.

form geregelten allgemeinen Riemannschen Metrik, so muß in der Tat »der innere Grund für die Maßverhältnisse« ganz wo anders gesucht werden. Er liegt nach Einstein in den »bindenden Kräften« der *Gravitation*. In der Einsteinschen Theorie (Kap. IV) spielen die Koeffizienten  $g_{ik}$  der metrischen Fundamentalform die gleiche Rolle wie in der Newtonschen Gravitationstheorie das Gravitationspotential; die Gesetze, nach denen das raumerfüllende Materiale die Metrik bestimmt, sind die Gravitationsgesetze. Das Gravitationsfeld bewirkt ein solches Verhalten der Lichtstrahlen und der »starren« Körper, die wir als Maßstäbe verwenden, daß sich, wenn wir die Maßstäbe und Lichtstrahlen in gewohnter Weise zur Ausmessung von Gegenständen benutzen, eine Maßgeometrie als gültig erweist, die in den der Beobachtung zugänglichen Gebieten sehr wenig von der Euklidischen abweicht. Die Maßverhältnisse kommen aber nicht auf Rechnung des Raumes als Form der Erscheinungen, sondern auf Rechnung des durch das Gravitationsfeld bestimmten physikalischen Verhaltens von Maßstäben und Lichtstrahlen.

Nach den durch Riemann gewonnenen Erkenntnissen blieb den Mathematikern nur der formale Ausbau seines geometrischen Gedankensystems als Aufgabe übrig; er ist von Christoffel, Ricci, Levi-Civita bewerkstelligt worden<sup>8)</sup>. Die eigentliche Weiterführung hat er aber mit den letzten Worten deutlich genug in die Hände eines nach ihm kommenden, seinem mathematischen ebenbürtigen physikalischen Genies gelegt. Nach 70 Jahren ist das von ihm Prophezeite durch Einstein in Erfüllung gegangen. Bevor wir uns aber der Einsteinschen Theorie zuwenden können, bleibt uns noch ein weiter Weg zurückzulegen: wir müssen uns zunächst mit dem mathematischen Ausbau der Riemannschen Geometrie, insbesondere mit dem gegenüber beliebigen Transformationen invarianten Tensorkalkül vertraut machen und dann, zu den Problemen der *Zeit* übergehend, die Lehren der speziellen Relativitätstheorie entwickeln.

### § 13. Bildung von Tensoren 1. Stufe durch Differentiation.

Wir beginnen damit, unter den allgemeineren Vorstellungen vom Raum, die wir uns gebildet haben, die Geometrie und Tensorrechnung zu begründen. Wir beschränken uns aber nicht auf die spezielle Dimensionszahl  $n = 3$ . Wir nehmen also an, die Lage jedes Punktes im Raume könne durch Angabe von  $n$  Koordinaten  $x_i$  charakterisiert werden; jede dieser Koordinaten ist eine stetige Ortsfunktion im Raum. Ist  $x_i^*$  irgend ein anderes System von  $n$  Koordinaten, so hängen die alten und neuen Koordinaten desselben Punktes gesetzmäßig durch stetige Transformationsformeln

$$(17) \quad x_i = x_i(x_1^* x_2^* \dots x_n^*) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

zusammen. Der Euklidische Raum ist dadurch gekennzeichnet, daß in ihm auf Grund innerer Beziehungen, die zwischen den Punkten bestehen, der Koordinatenbegriff so spezialisiert werden kann, daß der Übergang

zwischen den verschiedenen Koordinatensystemen durch *lineare* Transformationen dargestellt wird. Hier setzen wir nur voraus, daß der Koordinatenbegriff so weit eingeschränkt ist, daß die in den Transformationsformeln (17) auftretenden Funktionen von  $n$  Argumenten stetig differenzierbar sind und eine von 0 verschiedene Funktionaldeterminante besitzen. Das besagt, daß im Unendlichkleinen die  $n$ -dimensionale affine Geometrie gilt, daß nämlich zwischen den Differentialen umkehrbar-eindeutige lineare Transformationsformeln bestehen

$$(18) \quad dx_i = \alpha_{i1} dx_1^* + \alpha_{i2} dx_2^* + \cdots + \alpha_{in} dx_n^*, \quad \left( \alpha_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k^*} \right)$$

deren Koeffizienten  $\alpha_{ik}$  aber keine Konstante sind, sondern stetig veränderlich von Ort zu Ort. Genügt der Übergang von einem 1. zu einem 2. Koordinatensystem dieser Forderung, so auch der umgekehrte Übergang vom 2. zum 1.; genügt auch der Übergang vom 2. zu einem 3. Koordinatensystem dieser Forderung, so gleichfalls der Übergang vom 1. zum 3. Die Annahme einer solchen Einschränkung müssen wir machen, damit das Operieren mit Differentialen überhaupt einen Sinn hat.

Ist  $P$  ein bestimmter Punkt mit den Koordinaten  $x_i$ , so haben wir die Differentiale  $dx_i$  als die Komponenten einer *infinitesimalen Verschiebung* aufzufassen, die den Punkt  $P$  in den unendlich benachbarten Punkt mit den Koordinaten  $x_i + dx_i$  überführt. Die infinitesimalen Verschiebungen werden für die Entwicklung des Tensorkalküls die gleiche Rolle übernehmen wie die Verschiebungen in Kap. I. Es ist aber zu beachten, daß hier eine *Verschiebung wesentlich an einen Punkt  $P$  gebunden ist*, daß keinen Sinn hat, von den infinitesimalen Verschiebungen zweier verschiedener Punkte zu sagen, sie seien gleich oder ungleich. Man könnte freilich auf die Festsetzung verfallen, infinitesimale Verschiebungen zweier Punkte gleich zu nennen, wenn sie dieselben Komponenten haben; aber aus dem Umstand, daß die  $\alpha_{ik}$  in (18) keine Konstante sind, geht hervor, daß wenn dies in einem Koordinatensystem der Fall ist, es in einem anderen Koordinatensystem keineswegs zu gelten braucht. Wir können demnach nur von der infinitesimalen Verschiebung eines *Punktes*, nicht aber von einem in Kap. I des ganzen Raumes sprechen; infolgedessen auch nicht von einem Vektor oder Tensor schlechthin, sondern von einem *Vektor oder Tensor in einem Punkte  $P$* . Wir verstehen darunter eine lineare, bilinear, trilineare, ... Form einer oder zweier oder dreier ... willkürlicher infinitesimalen Verschiebungen des Punktes  $P$ ; eine solche Form hat die Benutzung eines bestimmten Koordinatensystems bestimmte Koeffizienten, welche die (kovarianten) *Tensorkomponenten* heißen. Die Möglichkeit dieser Begriffe beruht auf dem Umstande, daß der Übergang von einem zu einem andern Koordinatensystem für die Differentiale in einer linearen Transformation sich ausdrückt. Die ganze *Tensoralgebra* läßt sich jetzt vollständig ungeändert übertragen, wenn wir annehmen, daß im Punkte  $P$  ein nicht-ausgearteter symmetrischer Tensor 2. Stufe als *metrischer Fundamentaltensor* ein für allemal gegeben ist. Wir setzen in der Tat vor

daß dies für jeden Punkt  $P$  der Fall ist, daß unserm Raum durch eine positiv-definite quadratische Differentialform

$$(19) \quad \sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k$$

(mit stetigen Koeffizienten  $g_{ik}$ ) eine Maßbestimmung aufgeprägt ist. Wie früher können wir die infinitesimale Verschiebung eines Punktes  $P$  selber als einen Vektor in  $P$  betrachten, von dem die  $dx_i$  die kontravarianten Komponenten sind, während seine kovarianten durch  $\sum_k g_{ik} dx_k$  bestimmt

werden. Auch die *feinere Systematik* der Tensoren kann hier ungeändert benutzt werden. Ein *Tensorfeld*, z. B. ein *Flächentensorfeld* 2. Stufe im Raume ist gegeben, wenn jedem Punkte  $P$  ein *Tensor in  $P$*  von dieser Stufe zugeordnet ist. Benutzen wir zur analytischen Darstellung ein bestimmtes Koordinatensystem, so werden wir noch voraussetzen, daß die Tensorkomponenten stetige Funktionen der Koordinaten des Punktes  $P$  sind; zufolge der Annahme über den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Koordinatensystemen ist dies eine invariante, vom Koordinatensystem unabhängige Voraussetzung\*). Die Metrik beruht auf einem Linientensorfeld 2. Stufe.

Ist jedem Wert eines Parameters  $s$  ein Punkt  $P = P(s)$  in stetiger Weise zugeordnet, so ist, wenn wir  $s$  als Zeit deuten, damit eine »Bewegung« gegeben; wir wollen diesen Namen in Ermanglung eines andern Ausdrucks in rein mathematischem Sinne auch dann anwenden, wenn wir uns einer solchen Deutung des Parameters  $s$  enthalten. Bei Benutzung eines bestimmten Koordinatensystems erhalten wir eine Darstellung

$$(20) \quad x_i = x_i(s)$$

der Bewegung durch  $n$  stetige Funktionen  $x_i(s)$ , von denen wir annehmen, daß sie nicht nur stetig, sondern stetig differentierbar sind. Zugleich ist (20) eine Parameterdarstellung der »Bahnkurve« der Bewegung. Beim Übergang vom Parameterwert  $s$  zu  $s + ds$  erfährt der zugehörige Punkt  $P$  eine infinitesimale Verschiebung mit den Komponenten  $dx_i$ . Dividieren wir diesen Vektor in  $P$  durch  $ds$ , so erhalten wir die »Geschwindigkeit«,

einen Vektor in  $P$  mit den kontravarianten Komponenten  $\frac{dx_i}{ds} = u^i$ . Die

Geschwindigkeit ist von Hause aus ein kontravarianter Vektor; erst auf Grund der Raummetrik können wir seine kovarianten Komponenten

$$u_i = \sum_k g_{ik} \frac{dx_k}{ds}$$

\*) Bei Entwicklung der Tensoranalysis müssen wir übrigens nicht nur Stetigkeit, sondern auch Differentierbarkeit der Komponenten postulieren, was weitergehende Einschränkungen des Koordinatenbegriffs verlangt; aber wir wollen uns nicht mit solchen Skrupeln aufhalten (wiewohl man sie keineswegs leicht zu nehmen hat; diese Schwierigkeiten entspringen aus der begrifflich dunklen Natur des Kontinuums).

bilden. Das Quadrat der Größe der Geschwindigkeit ist wie bei jedem Vektor durch die Invariante

$$\sum_{ik} g_{ik} u^i u^k = \sum_{ik} g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} \left( = \sum_i u_i u^i = \sum_{ik} g^{ik} u_i u_k \right)$$

gegeben. Die Parameterdarstellung einer Kurve können wir insbesondere so wählen, daß diese Größe identisch in  $s$  gleich 1 wird; der Parameter  $s$  bedeutet dann die von irgendeinem Anfangspunkt auf der Kurve aus gerechnete Bogenlänge. Bei solcher Parameterwahl bezeichnen wir den Vektor Geschwindigkeit als die »Richtung« der Kurve.

Ist  $\varphi$  ein gegebenes Skalarfeld im Raum und bedeuten  $x_i$  und  $x_i^*$  irgend zwei Koordinatensysteme, so wird in dem einen und andern das Skalarfeld sich durch eine Funktion der  $x_i$  bzw.  $x_i^*$  darstellen:

$$\varphi = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*).$$

Bilden wir den Zuwachs von  $\varphi$  bei einer infinitesimalen Verschiebung des Argumentpunktes, so kommt

$$d\varphi = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_i \frac{\partial f^*}{\partial x_i^*} dx_i^*.$$

Daraus geht hervor, daß die  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  die kovarianten Komponenten eines Linientensorfeldes 1. Stufe bilden, das in einer von jedem Koordinatensystem unabhängigen Weise aus dem Skalarfeld  $\varphi$  entspringt. Hier haben wir ein einfaches Beispiel zum Begriff Vektorfeld; zugleich zeigt sich, daß die Operation »grad« auch in der jetzt zu entwickelnden allgemeinen Tensoranalysis ihre Bedeutung behält, daß sie invarianten Charakter trägt nicht nur gegenüber linearen, sondern beliebigen Koordinatentransformationen.

Das ist aber allgemein mit dem in Kap. I, § 8 betrachteten Prozeß der »Differentiation« keineswegs der Fall, und die Tensoranalysis gestaltet sich im Riemannschen Raum etwas verwickelter als im Euklidischen. Sind z. B.  $f_i$  die kovarianten Komponenten eines Vektorfeldes, so nahmen wir damals einen willkürlichen Vektor mit den vom Orte unabhängigen (kontravarianten) Komponenten  $\xi^i$  zu Hilfe und bildeten den Gradienten von  $\sum_i f_i \xi^i$ ; dies führte ohne weiteres deshalb zum Ziel, weil ein Vektor, der in einem Koordinatensystem konstante Komponenten besitzt, diese Eigenschaft in jedem anderen, das aus ihm durch lineare Transformation hervorgeht, behält. Hier trifft das aber nicht mehr zu.

Trotzdem wird uns auch jetzt dieses Verfahren gute Dienste leisten. Es steht in engster Beziehung zu dem von Cauchy begründeten *formalen Kalkül mit Differentialen*. Wir betrachten Funktionen  $H(z_1, z_2, \dots, z_n)$  von  $n$  unabhängigen Variablen  $z_i$ . Nachdem wir ein willkürliches System von  $n$  Zahlen

$$d = (d^1, d^2, \dots, d^n)$$

gewählt, definieren wir allgemein

$$dH = \frac{\partial H}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial H}{\partial z_2} dz_2 + \dots + \frac{\partial H}{\partial z_n} dz_n.$$

Für dieses sog. »Differential«, das nun aber nichts mit »unendlichkleinen« Größen zu tun hat, gelten, wenn  $H, H'$  irgend zwei Funktionen der  $z_i$  sind und  $\alpha$  eine Konstante, die Rechenregeln

$$(21) \quad \begin{aligned} d(H + H') &= dH + dH', & d(\alpha H) &= \alpha \cdot dH, \\ d(H \cdot H') &= H \cdot dH' + H' \cdot dH. \end{aligned}$$

Für die  $z_i$  selber gelten nach unsern Festsetzungen die Formeln  $dz_i = d^i$ . (21) sind spezielle Fälle des folgenden allgemeinen Gesetzes: wenn  $x_1, x_2, \dots, x_m$  irgendwelche Funktionen von  $z$  sind, so ist das Differential einer irgendwie aus ihnen zusammengesetzten Funktion

$$(22) \quad \begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_m) &= F(z_1, z_2, \dots, z_n): \\ dF &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m. \end{aligned}$$

Wählen wir ein zweites System von irgend  $n$  Zahlen

$$\delta = (\delta^1, \delta^2, \dots, \delta^n),$$

so können wir, wie von der Funktion  $H$  das Differential  $\delta H$ , so von der Funktion  $dH$  der Argumente  $z$  das Differential

$$\delta dH = \sum_i \delta^i \frac{\partial}{\partial z_i} \left( \sum_k \frac{\partial H}{\partial z_k} d^k \right) = \sum_{i,k} \frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_k} \delta^i d^k$$

bilden. Es ist, wie man sieht,

$$(23) \quad \delta dH = d\delta H.$$

Für unsere Zwecke können wir von diesem Kalkül folgenden Gebrauch machen. Wir gehen aus von einem bestimmten Koordinatensystem  $z_i$ . Die Koordinaten  $x_i$  irgend eines andern Systems sind zufolge der Transformationsformeln Funktionen der  $z$ . Die nach dem Cauchyschen Kalkül gebildeten Differentiale  $dx_i = \xi^i$  sind laut Definition die kontravarianten Komponenten eines Vektorfeldes im  $x$ -Koordinatensystem, dessen Komponenten im  $z$ -System die *konstanten*, vom Orte unabhängigen Werte  $d^i$  haben. Hier haben wir den Anschluß an unser früheres Verfahren. Man kann die Zahlen  $d^i$  so wählen (auf eine und nur eine Weise), daß die  $dx_i$  an einer gegebenen Stelle  $P$  beliebige Werte erhalten. Bezeichnen die  $x_i^*$  ein anderes Koordinatensystem, so sind die  $x_i^*$  gleichfalls Funktionen der  $z$ , und ihre Cauchyschen Differentiale  $dx_i^*$  hängen mit den  $dx_i$  durch die Transformationsformeln (18) zusammen. — Wir leiten nochmals den Gradienten ab. Ist  $\varphi$  ein Skalarfeld, so sei

$$\varphi = \varphi(z_1 z_2 \dots z_n) = f(x_1 x_2 \dots x_n) = f^*(x_1^* x_2^* \dots x_n^*).$$

Die  $z_i$  nehmen wir als unabhängige Variable; dann ist im Sinne Cauchys nach (22):

$$d\varphi = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_i \frac{\partial f^*}{\partial x_i^*} dx_i^*.$$

Nun aber können wir weiter kommen. Liegt ein *Vektorfeld* vor, dessen kovariante Komponenten in  $z$  mit  $q_i$ , in  $x$  mit  $f_i$ , in  $x^*$  mit  $f_i^*$  bezeichnet seien, so bilden wir die Invariante

$$d\varphi = q_i d^i = f_i dx_i = f_i^* dx_i^*.$$

Dabei sind die  $z$  als unabhängige Variable und die Bezeichnungen im Cauchyschen Sinne zu nehmen; auch soll von jetzt ab unsere alte Festsetzung über Fortlassung von Summenzeichen wieder in Kraft treten. Wir bilden

$$\begin{aligned} \delta d\varphi &= \delta f_i \cdot dx_i + f_i \delta dx_i \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_i \delta x_k + f_i \delta dx_i. \end{aligned}$$

Das Auftreten des zweiten Gliedes auf der rechten Seite ist wichtig. Wir bekommen also die Gleichung

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_i \delta x_k + f_i \delta dx_i = \frac{\partial f_i^*}{\partial x_k^*} dx_i^* \delta x_k^* + f_i^* \delta dx_i^*.$$

In dieser Gestalt liefert sie uns eben wegen jenes störenden Terms mit den Differentialen 2. Ordnung, deren Sinn durchaus von dem zugrunde gelegten System der unabhängigen Variablen  $z$  abhängt, keine Invariante. Bilden wir aber in der gleichen Weise  $d\delta\varphi$  und subtrahieren, so folgt wegen

$$\begin{aligned} \delta dx_i &= d\delta x_i, & \delta dx_i^* &= d\delta x_i^* : \\ \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right) dx_i \delta x_k &= \left( \frac{\partial f_i^*}{\partial x_k^*} - \frac{\partial f_k^*}{\partial x_i^*} \right) dx_i^* \delta x_k^*. \end{aligned}$$

Hier ist nun das Koordinatensystem der unabhängigen Variablen eliminiert, und wir erkennen, daß

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

die kovarianten Komponenten eines Flächentensors 1. Stufe sind, der aus dem gegebenen Linientensor 1. Stufe auf eine vom Koordinatensystem unabhängige Weise hervorgeht: die rot ist gegenüber beliebigen Transformationen, nicht nur gegenüber linearen, invariant.

Auf die gleiche Art können wir die nächste Stufe erklimmen. Es liege das Feld eines Flächentensors 1. Stufe vor; seine kovarianten Komponenten in  $z$ ,  $x$  und  $x^*$  seien  $q_{ik}$ ,  $f_{ik}$ ,  $f_{ik}^*$ . Wir gehen aus von der Invariante

$$\delta d\varphi = q_{ik} d^i d^k = f_{ik} dx_i \delta x_k = f_{ik}^* dx_i^* \delta x_k^*$$

und bilden für ein drittes System konstanter Größen ( $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^1, \mathfrak{b}^2, \dots, \mathfrak{b}^n$ ):

$$(24) \quad \mathfrak{b} \delta d\varphi = \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} dx_i \delta x_k \mathfrak{b} x_l + (f_{ik} \mathfrak{b} dx_i \delta x_k + f_{ik} dx_i \mathfrak{b} \delta x_k).$$

Nehmen wir hier die drei zyklischen Vertauschungen der Differentiale  $d$ ,  $\delta$  und  $\mathfrak{b}$  vor und addieren, so kommt unter geeigneter Änderung der Indizesbezeichnung

$$\mathfrak{b} \delta d\varphi + d \mathfrak{b} \delta \varphi + \delta d \mathfrak{b} \varphi = \left( \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} \right) dx_i \delta x_k \mathfrak{b} x_l,$$

da die sechs Summanden, welche aus den in (24) eingeklammerten Zusatzgliedern entspringen, wegen der Relationen

$$f_{ki} = -f_{ik}, \quad \delta \delta x_i = d \delta x_i, \quad \delta \delta x_i = \delta \delta x_i, \quad d \delta x_i = \delta d x_i$$

sich zu je zweien gegenseitig zerstören. Daher ist

$$\left( \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} \right) d x_i \delta x_k \delta x_l = \left( \frac{\partial f_{kl}^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial f_{li}^*}{\partial x_k^*} + \frac{\partial f_{ik}^*}{\partial x_l^*} \right) d x_i^* \delta x_k^* \delta x_l^*,$$

und wir sehen, daß

$$\frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l}$$

die kovarianten Komponenten eines Raumtensorfeldes 1. Stufe bilden, das in einer von jedem Koordinatensystem unabhängigen Weise aus dem Flächentensorfeld entspringt.

Man beachte, wie sich hier die feinere Systematik der Tensoren bewährt. Die dargelegte Methode führt uns zu der Differentialanalysis der (Linien-, Flächen-, Raum-, ...) Tensoren 1. Stufe, aber nicht weiter. Für diesen Teil der Tensoranalysis ist es charakteristisch, daß sie noch von jeder Metrik des Raumes unabhängig ist; der metrische Fundamental-tensor  $g_{ik}$  tritt überhaupt nicht auf. Für die übrigen Operationen der Tensoranalysis trifft das nicht mehr zu; in sie gehen die  $g_{ik}$  oder vielmehr deren Ableitungen in eigentümlicher Weise ein, eine Erscheinung, die naturgemäß in dem »linearen« Tensorkalkül, in welchem die  $g_{ik}$  vom Orte unabhängige Konstante sind, noch nicht zur Geltung kommt.

#### § 14. Geodäsie im Riemannschen Raum.

Die geradlinigen Koordinaten in der Euklidischen Geometrie sind wesentlich dadurch gekennzeichnet, daß bei ihrer Benutzung die metrische Fundamentalform konstante Koeffizienten  $g_{ik}$  bekommt. In der allgemeinen Riemannschen Geometrie existiert ein solches Koordinatensystem nicht; wohl aber gibt es zu jedem Punkt  $P$  Koordinatensysteme  $x_i$  von der Art, daß für sie im Punkte  $P$  die Komponenten  $g_{ik}$  des Fundamental-tensors stationär werden  $\left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} = 0 \right)$ . Wir sprechen dann von einem *geodätischen Koordinatensystem in  $P$* . Der leitende Gedanke bei der Weiterführung der Tensorrechnung ist nun der, zu unabhängigen Variablen  $z_i$  nicht mehr ein beliebiges, sondern ein in  $P$  geodätisches Koordinatensystem zu benutzen.

Um ein solches System möglichst einfach zu konstruieren und die weiteren Rechnungen in durchsichtiger invarianter Form durchführen zu können, erweist sich folgende Hilfskonstruktion als zweckdienlich. Es liege ein Vektorfeld vor mit den kovarianten Komponenten  $\xi_i$ , den kontravarianten  $\xi^i$ . Dann ist

$$\xi_k \xi^k = g_{ik} \xi^i \xi^k$$

eine Invariante. Wir bilden ihren Gradienten; es ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\xi_k \xi^k) = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \cdot \xi^k + \xi_k \cdot \frac{\partial \xi^k}{\partial x_i},$$

$$(25) \quad \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \frac{\partial (g_{kl} \xi^l)}{\partial x_i} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i} \xi^l + g_{kl} \frac{\partial \xi^l}{\partial x_i},$$

$$(26) \quad \xi_k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \xi_l \frac{\partial \xi^l}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} \xi^r \xi^s;$$

also

$$(27) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\xi_k \xi^k) = \xi_k \frac{\partial \xi^k}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} \xi^r \xi^s = \xi_k \frac{\partial \xi^k}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} \xi^r \xi^s.$$

Wir benutzen hier den zweiten Ausdruck. Durch Multiplikation des Flächentensors 1. Stufe

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$$

mit  $\xi^k$  und Verjüngung nach  $k$  erhalten wir den Vektor mit den kovarianten Komponenten

$$\xi^k \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \right),$$

durch Addition desselben zu (27) aber den Vektor

$$\lambda_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \cdot \xi^k - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} \xi^r \xi^s.$$

Wir formen seine Komponenten  $\lambda_i$  noch dadurch um, daß wir überall, auch im ersten Glied, die kontravarianten Komponenten von  $\xi$  benutzen — vgl. die analoge Umrechnung (25), (26) —:

$$\xi^k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = g^{ij} \frac{\partial \xi^j}{\partial x_k} \xi^k + \frac{\partial g_{ir}}{\partial x_s} \xi^r \xi^s.$$

Wenn wir hier Symmetrie in bezug auf  $r$  und  $s$  herstellen und zu den kontravarianten Komponenten von  $\lambda$  übergehen, so werden wir dazu gedrängt, die Größen  $\begin{bmatrix} r & s \\ i \end{bmatrix}$  und die »Christoffelschen Dreiindizesymbole«

$\left\{ \begin{smallmatrix} r & s \\ i \end{smallmatrix} \right\}$  einzuführen durch die Gleichungen

$$(28) \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ir}}{\partial x_s} + \frac{\partial g_{is}}{\partial x_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} \right) = \begin{bmatrix} r & s \\ i \end{bmatrix},$$

$$(29) \quad \begin{bmatrix} r & s \\ i \end{bmatrix} = g^{ij} \left\{ \begin{smallmatrix} r & s \\ j \end{smallmatrix} \right\},$$

und erhalten

$$(30) \quad \lambda^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} \xi^k + \left\{ \begin{smallmatrix} r & s \\ i \end{smallmatrix} \right\} \xi^r \xi^s.$$

Der durch diese Formel dargestellte Zusammenhang zwischen den Vektoren  $\xi$  und  $\lambda$  ist unabhängig vom Koordinatensystem.

Bevor wir weiter gehen, mögen noch einige Bemerkungen über die Dreiindizesymbole Platz finden. Gegenüber *linearen* Transformationen besitzt  $\begin{bmatrix} r & s \\ i \end{bmatrix}$  Tensorcharakter, und zwar kovarianten in bezug auf alle drei Indizes. Mit Rücksicht darauf und auf den Zusammenhang zwischen den »eckigen« und »geschweiften« Klammergrößen wäre die Bezeichnung

$$\begin{Bmatrix} r & s \\ i \end{Bmatrix} = \Gamma_{rs}^i$$

angemessen. — Durch Umkehrung der Gleichungen (28) lassen sich leicht die Ableitungen der  $g_{ik}$  aus den Indizesymbolen berechnen; es gilt

$$(31) \quad \begin{bmatrix} r & i \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & i \\ r \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i}.$$

Ein geodätisches Koordinatensystem kann demnach durch das Verschwinden der sämtlichen Größen  $\begin{bmatrix} r & s \\ i \end{bmatrix}$  oder auch der sämtlichen  $\begin{Bmatrix} r & s \\ i \end{Bmatrix}$  charakterisiert werden. Die Christoffelschen Dreiindizesymbole werden in den folgenden mathematischen Entwicklungen wie auch später in den physikalischen Anwendungen eine hervorragende Rolle spielen; es mag gleich hier verraten werden, daß sie in der Einsteinschen Theorie, nach der die Gravitation dem Raum seine Maßbestimmung aufprägt, die Bedeutung der Komponenten des Gravitationsfeldes haben.

Daß an einer Stelle  $P$  die Komponenten  $\lambda^i$  verschwinden, ist eine invariante Eigenschaft des Vektorfeldes  $\xi$ , die wir durch die Worte ausdrücken wollen: das Vektorfeld  $\xi$  ist im Punkte  $P$  geodätisch. Dann gilt der Satz:

Das Koordinatensystem  $x_i$  ist an der Stelle  $P$  dann und nur dann geodätisch, wenn jedes Vektorfeld, das in diesem Koordinatensystem *konstante* Komponenten  $\xi^i$  besitzt, im Punkte  $P$  geodätisch ist.

Denn für jedes Vektorfeld mit konstanten Komponenten  $\xi^i$  ist

$$\lambda^i = \begin{Bmatrix} r & s \\ i \end{Bmatrix} \xi^r \xi^s;$$

daraus geht unsere Behauptung hervor.

Seien  $z_i, x_i$  irgend zwei Koordinatensysteme. Wir wählen ein Vektorfeld mit den konstanten (kontravarianten) Komponenten  $d^i$  in  $z$ ;  $\xi^i = dx_i$  seien seine Komponenten in  $x$ ; die  $z_i$  fungieren als unabhängige Variable. Es ist jetzt

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} \xi^k = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} dx_k = d\xi^i = d^2 x_i,$$

und die Gleichungen (30) lauten:

$$(32) \quad d^2 x_i + \begin{Bmatrix} r & s \\ i \end{Bmatrix} dx_r dx_s = \lambda^i.$$

Daher:

Benutzt man die Koordinaten  $z_i$  als unabhängige Variable und ist  $x_i$  irgendein Koordinatensystem, so ist das erste dann und nur dann im Punkte  $P$  geodätisch, wenn daselbst im Sinne Cauchys die Gleichungen

$$(33) \quad d^2 x_i + \left\{ \begin{matrix} r & s \\ i \end{matrix} \right\} dx_r dx_s = 0$$

(identisch in den Differentialen der unabhängigen Variablen) bestehen.

Zunächst erhalten wir daraus sehr einfach die Konstruktion eines geodätischen Koordinatensystems  $z_i$  für den Punkt  $P$ . Sind nämlich  $x_i$  beliebige Koordinaten, die im Punkte  $P$  die Werte  $x_i^0$  haben, und bedeuten  $\left\{ \begin{matrix} r & s \\ i \end{matrix} \right\}_0$  die Werte der Indizesymbole daselbst, so brauchen wir nur die Transformation

$$x_i - x_i^0 = z_i - \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} r & s \\ i \end{matrix} \right\}_0 z_r z_s$$

auszuführen. Für  $z_i = 0$  ist dann in der Tat, wenn die  $z_i$  als unabhängige Variable fungieren,

$$x_i = x_i^0, \quad dx_i = dz_i, \quad d^2 x_i = - \left\{ \begin{matrix} r & s \\ i \end{matrix} \right\}_0 dz_r dz_s.$$

Es bestehen somit die Gleichungen (33).

Vor allem aber ist in unserm Satz folgende Tatsache ausgesprochen: Benutzt man Koordinaten, die für  $P$  geodätisch sind, als unabhängige Variable, so gelten in jedem Koordinatensystem die Gleichungen (33) in der Stelle  $P$ . Wir können dies Ergebnis noch verallgemeinern, wenn wir ein zweites Vektorfeld  $\delta$  einführen, das in den unabhängigen Variablen die konstanten Komponenten  $\delta^i$  hat. Dann gilt im Punkte  $P$  auch

$$(34) \quad \delta dx_i + \left\{ \begin{matrix} r & s \\ i \end{matrix} \right\} dx_r \delta x_s = 0.$$

Denn wegen  $\delta dx_i = d\delta x_i$  ist die linke Seite eine symmetrische Bilinearform der  $d^i$  und  $\delta^i$ ; da die zugehörige quadratische Form, welche ihr durch die Identifizierung der  $\delta^i$  mit den  $d^i$  entspringt, identisch verschwindet, muß sie selber auch verschwinden.

Die Gleichung (34) lehrt folgendes: Sei im Punkte  $P$  ein Vektor gegeben; wir gehen durch die infinitesimale Verschiebung  $\delta x_i$  zum Nachbarpunkt  $P'$  über. Ordnen wir diesem Punkte  $P'$  einen Vektor  $\xi^i + \delta \xi^i$  der in dem für  $P$  geodätischen Koordinatensystem die gleichen Komponenten besitzt wie der gegebene Vektor im Punkte  $P$ , so gilt

$$(35) \quad \delta \xi^i = - \left\{ \begin{matrix} r & s \\ i \end{matrix} \right\} \xi^r \delta x_s.$$

Diese Bedingung ist, wie man aus (35) sieht, worin das betr. geodätische Koordinatensystem gar nicht eingeht, unabhängig von der Wahl desselben und durch (35) sogleich für ein beliebiges Koordinatensystem formuliert. Die durch (35) definierte Variation von  $\xi$  beim Übergang von  $P$  zu  $P'$  hat demnach invariante Bedeutung; durch sie wird, wie man sich an

gemäß ausdrücken wird, der ursprüngliche Vektor *ungeändert* von  $P$  nach  $P'$  verpflanzt, er wird *parallel mit sich* von  $P$  nach  $P'$  verschoben. Damit sind wir zu dem invarianten Grundbegriff<sup>9)</sup> gelangt, von dem aus der Aufbau des vollständigen Tensorkalküls sich mühelos vollziehen läßt. Benutzen wir in  $P$  ein geodätisches Koordinatensystem, so bleiben bei einer infinitesimalen Parallelverschiebung  $\delta$  nicht bloß die kontravarianten Komponenten  $\xi^i$ , sondern auch die kovarianten  $\xi_i = g_{ik} \xi^k$  ungeändert, da ja in einem geodätischen Koordinatensystem  $\delta g_{ik} = 0$  ist. Sind also  $\xi^i, \eta^i$  zwei Vektoren im Punkte  $P$ , so bleibt bei einer gemeinsamen infinitesimalen Parallelverschiebung ihr invariantes skalares Produkt

$$\xi^i \eta_i = \xi_i \eta^i = g_{ik} \xi^i \eta^k$$

erhalten. Wenden wir dies erstens an auf den Fall  $\eta = \xi$  und zweitens auf die beiden Vektoren  $\xi$  und  $\eta$ , so können wir diesen Satz anschaulicher dahin aussprechen, daß bei einer infinitesimalen Parallelverschiebung die Längen der beiden Vektoren und der Winkel, den sie miteinander einschließen, erhalten bleiben. Ebensovienig werden durch sie natürlich die zwischen zwei, bzw. drei Vektoren  $\xi, \eta, \zeta$  bestehenden Beziehungen

$$\eta^i = \alpha \cdot \xi^i, \quad \zeta^i = \xi^i + \eta^i \quad (\alpha \text{ eine Konstante})$$

zerstört. Aus der Gleichung  $\delta(\xi_i \eta^i) = 0$  für eine Parallelverschiebung  $\delta$  ergeben sich noch die Formeln für die Zuwächse  $\delta \xi_i$  der *kovarianten* Komponenten  $\xi_i$  bei diesem Prozeß:

$$\begin{aligned} \delta(\xi_i \eta^i) &= \eta^i \delta \xi_i + \xi_i \delta \eta^i \\ &= \eta^i \delta \xi_i - \xi_i \left\{ \begin{smallmatrix} r & s \\ i \end{smallmatrix} \right\} \eta^r \delta x_s \\ &= \eta^i \left( \delta \xi_i - \left\{ \begin{smallmatrix} i & s \\ r \end{smallmatrix} \right\} \xi_r \delta x_s \right), \end{aligned}$$

also

$$(36) \quad \delta \xi_i = \left\{ \begin{smallmatrix} i & s \\ r \end{smallmatrix} \right\} \xi_r \delta x_s.$$

Natürlich gelangt man zu dem gleichen Ergebnis durch Umrechnung von (35) auf die kovarianten Komponenten.

Ist eine Kurve in Parameterdarstellung  $x_i = x_i(s)$  gegeben und in ihrem Anfangspunkt ein Vektor, so können wir diesen längs der ganzen Kurve parallel mit sich verschieben. Es entspricht dann jedem Parameterwert  $s$  nicht nur ein Punkt  $P = P(s)$ , sondern gleichzeitig ein Vektor  $\xi^i = \xi^i(s)$  in diesem Punkte  $P(s)$ , und zwar in solcher Weise, daß die Gleichungen

$$\frac{d\xi^i}{ds} = - \left\{ \begin{smallmatrix} h & l \\ i \end{smallmatrix} \right\} \xi^h \frac{dx_l}{ds}$$

bestehen. Durch sie, die invarianten Charakter besitzen, werden in der Tat nach bekannten Existenztheoremen über Differentialgleichungen die Funktionen  $\xi^i(s)$  bei gegebenen Anfangswerten eindeutig bestimmt. Der Vektor behält bei der Verschiebung konstante Länge. Die Bedingungen

(35) für eine infinitesimale Parallelverschiebung sind in dem Sinne »nicht integrabel«, daß ein Vektor im allgemeinen bei Parallelverschiebung längs einer geschlossenen Kurve nicht in seine Ausgangslage zurückkehrt. Auf diesen Umstand werden wir im § 16 genauer eingehen. Es stellt sich heraus, daß nur in der Euklidischen Geometrie allgemein Integrabilität statthat, und gerade darin liegt die invariante Charakterisierung der Euklidischen Geometrie.

Alle unsere Betrachtungen gelten so gut für eine indefinite wie für eine definite quadratische Grundform, wenn sie nur eine von 0 verschiedene Determinante besitzt. Um sich aber geometrisch ausdrücken zu können, ist es bequem, sich auf den zweiten Fall zu beschränken. Für eine Kurve können wir dann, indem wir die Bogenlänge als Parameter benutzen, eine Darstellung  $x_i = x_i(s)$  geben, für welche der Vektor mit den Komponenten  $\frac{dx_i}{ds} = u^i$  die Länge 1 hat; ihn haben wir die Richtung genannt. Ändert sich die Richtung einer Kurve längs derselben nicht, sondern wandert parallel mit sich fort, so heißt die Kurve eine *geodätische Linie*. Sie ist das naturgemäße Analogon der Euklidischen Geraden in der allgemeinen Riemannschen Geometrie; denn die kennzeichnendste Eigenschaft der geraden Linie ist eben die, daß sie ihre Richtung ungeändert einhält. Die Differentialgleichungen der geodätischen Linie lauten

$$(37) \quad \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} h & l \\ i & i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds} = 0.$$

In einem Punkte, in welchem das zugrunde liegende Koordinatensystem geodätisch ist, reduzieren sie sich auf  $\frac{d^2 x_i}{ds^2} = 0$ .

Indem wir zum Ausgang der Untersuchungen dieses Paragraphen zurückkehren, sei zum Schluß noch eine Bemerkung über die »geodätischen Vektorfelder« hinzugefügt. Wir pflegen jedes Vektorfeld

$$\xi^i = \xi^i(x_1 x_2 \dots x_n)$$

graphisch darzustellen durch Zeichnung der »Feldlinien« (der »Kraftlinien« im Falle eines Kraftfeldes), d. i. derjenigen Linien, die durch die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{ds} = \xi^i(x_1 x_2 \dots x_n)$$

bestimmt werden. Bei Einführung dieser Linien gehen die charakteristischen Gleichungen  $\lambda^i = 0$  eines geodätischen Feldes über in (37); d. h. die Feldlinien eines überall geodätischen Vektorfeldes sind geodätische Linien, und das Feld hat längs jeder solchen Feldlinie konstanten Betrag (dadurch ist es aber auch vollständig gekennzeichnet). Im übrigen ist dieser Begriff des geodätischen Feldes nur ein Hilfsbegriff, dem keine erhebliche systematische Bedeutung zukommt.

## § 15. Allgemeine Tensoranalysis.

Nunmehr ist es aber an der Zeit, zu schildern, wie auf Grund des invarianten Begriffs der Parallelverschiebung der absolute Differentialkalkül, von dem ein erstes Stück in § 13 ausgeführt wurde, vollständig begründet werden kann. Wir wählen als Beispiel ein durch seine kovarianten Komponenten gegebenes Tensorfeld 2. Stufe  $\varphi_{ik}$ ; Symmetrie braucht nicht vorausgesetzt zu werden. Wir nehmen im Punkte  $P$  irgend zwei Vektoren  $\xi, \eta$  und bilden die Variation, welche die Invariante  $\varphi_{ik} \xi^i \eta^k$  bei der infinitesimalen Verschiebung  $\delta$  erleidet, die den Punkt  $P$  in  $P'$  überführt, falls dabei die Vektoren  $\xi$  und  $\eta$  »ungeändert«, parallel mit sich von  $P$  nach  $P'$  verpflanzt werden. Dafür finden wir

$$\delta(\varphi_{ik} \xi^i \eta^k) = \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_l} \xi^i \eta^k \delta x_l + \dot{\varphi}_{ik} \eta^k \delta \xi^i + \varphi_{ik} \xi^i \delta \eta^k.$$

Die letzten beiden Summanden sind gemäß der Bedingung der Parallelverschiebung

$$= -\varphi_{ik} \eta^k \left\{ \begin{matrix} r & l \\ i & \end{matrix} \right\} \xi^r \delta x_l - \varphi_{ik} \xi^i \left\{ \begin{matrix} r & l \\ k & \end{matrix} \right\} \eta^r \delta x_l.$$

Indem wir die Indizes an  $\xi$  und  $\eta$  in den drei Summanden zur Übereinstimmung bringen, erhalten wir für jene invariante Variation einen Wert, der sich als eine trilineare Form von  $\xi^i, \eta^k, \delta x_l$  darstellt mit den Koeffizienten

$$(II) \quad \psi_{ik,l} = \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_l} - \left\{ \begin{matrix} i & l \\ r & \end{matrix} \right\} \varphi_{rk} - \left\{ \begin{matrix} k & l \\ r & \end{matrix} \right\} \varphi_{ir}.$$

Die  $\psi_{ik,l}$  sind somit die kovarianten Komponenten eines Tensors 3. Stufe (im erweiterten Sinne), der durch den Tensor  $\varphi_{ik}$  unabhängig vom Koordinatensystem bestimmt ist.

Auf dem gleichen Wege und in demselben Sinne erhält man aus einem Vektor mit den kovarianten Komponenten  $\varphi_i$  einen Tensor 2. Stufe

$$(I) \quad \psi_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} i & k \\ r & \end{matrix} \right\} \varphi_r.$$

Aber auch bei Benutzung zum Teil oder vollständig kontravarianter Komponenten lassen sich diese invarianten Differentialoperationen direkt ausführen, ohne daß es nötig wäre, sie aus den kovarianten durch mühsames Umrechnen herzuleiten. Nehmen wir das letzte Beispiel! Es ist (unter  $\xi$  wiederum einen Vektor im Punkte  $P$  verstanden, der bei der auszuführenden Verschiebung  $\delta$  ungeändert mitgeht)

$$\varphi_i \xi^i = \varphi^i \xi_i.$$

Einerseits ist nun nach (35)

$$\delta(\varphi_i \xi^i) = \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} i & k \\ r & \end{matrix} \right\} \varphi_r \right) \xi^i \delta x_k,$$

andererseits nach (36)

$$\delta(\varphi^i \xi_i) = \left( \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_k} + \left\{ \begin{matrix} k & r \\ i & \end{matrix} \right\} \varphi^r \right) \xi_i \delta x_k.$$

Der durch (I) gegebene invariante Zusammenhang zwischen dem Vektor  $\varphi$  und dem Tensor  $\psi$  läßt sich daher auch in die Formeln fassen

$$(I') \quad \psi^i_k = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_k} + \left\{ \begin{matrix} k & r \\ i & \end{matrix} \right\} \varphi^r.$$

Statt (II) findet man auf die gleiche Weise auch

$$(II') \quad \psi^i_{k,l} = \frac{\partial \varphi^i_k}{\partial x_l} + \left\{ \begin{matrix} l & r \\ i & \end{matrix} \right\} \varphi^r_k - \left\{ \begin{matrix} k & l \\ r & \end{matrix} \right\} \varphi^i_r,$$

$$(II'') \quad \psi^{ik}_l = \frac{\partial \varphi^{ik}}{\partial x_l} + \left\{ \begin{matrix} l & r \\ i & \end{matrix} \right\} \varphi^{rk} + \left\{ \begin{matrix} l & r \\ k & \end{matrix} \right\} \varphi^{ir}.$$

Verjüngen wir (I') nach  $i$  und  $k$ , (II'), (II'') aber nach  $i$  und  $l$  und ersetzen darin hernach den Index  $k$  durch  $i$ , so erhalten wir:

$$(I_0) \quad \text{die Invariante} \quad \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_i} + \left\{ \begin{matrix} i & r \\ i & \end{matrix} \right\} \varphi^r,$$

$$(II_0) \quad \text{den Vektor} \quad \begin{cases} \psi_i = \frac{\partial \varphi^k_i}{\partial x_k} + \left\{ \begin{matrix} k & r \\ k & \end{matrix} \right\} \varphi^r_i - \left\{ \begin{matrix} i & k \\ r & \end{matrix} \right\} \varphi^k_r, \\ \psi^i = \frac{\partial \varphi^{ki}}{\partial x_k} + \left\{ \begin{matrix} k & r \\ k & \end{matrix} \right\} \varphi^{ri} + \left\{ \begin{matrix} k & r \\ i & \end{matrix} \right\} \varphi^{kr}. \end{cases}$$

Für die hierin immerfort auftretende Summe

$$\sum_i \left\{ \begin{matrix} i & r \\ i & \end{matrix} \right\}$$

läßt sich ein bemerkenswerter einfacher Ausdruck angeben. Betrachtet man in der Determinante  $g$  der Elemente  $g_{ik}$  die  $g_{ik}$  als unabhängige Variable, so ist die Ableitung der Determinante nach dem Element  $g_{ik}$  die zu diesem Element adjungierte Unterdeterminante, also  $= g \cdot g^{ik}$ ; so daß bei beliebiger Variation der Elemente die Formel gilt

$$(38) \quad \frac{\delta g}{g} = g^{ik} \delta g_{ik}.$$

Summiert man das Produkt  $g_{ik} g^{ik}$  zunächst nur über  $k$ , so ergibt sich 1 gemäß den Beziehungen, die zwischen den Koeffizienten zweier zueinander inversen linearen Transformationen  $g_{ik}$  und  $g^{ik}$  bestehen. Summiert man auch noch über  $i$ , so erhält man demnach den konstanten ganzzahligen Wert  $n$ . Daher ist

$$\sum_{ik} (g_{ik} \delta g^{ik} + g^{ik} \delta g_{ik}) = 0,$$

und neben (38) gilt die Formel

$$(39) \quad \frac{\delta g}{g} = - g_{ik} \delta g^{ik},$$

von der wir später gelegentlich Gebrauch machen werden. Jetzt aber schließen wir aus (38) zunächst

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_r} &= \frac{\partial \lg g}{\partial x_r} = g^{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} = g^{ik} \left( \begin{bmatrix} i & r \\ k & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & r \\ i & \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{Bmatrix} i & r \\ i & \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k & r \\ k & \end{Bmatrix} = 2 \begin{Bmatrix} i & r \\ i & \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

daher

$$\begin{Bmatrix} i & r \\ i & \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g}{\partial x_r} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_r}.$$

Damit ergibt sich für  $(I_0)$  die einfachere Formel

$$(III) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} \cdot \varphi^i)}{\partial x_i}$$

und für  $(II_0)$ :

$$(IV_1) \quad \psi_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} \cdot \varphi^k_i)}{\partial x_k} - \begin{Bmatrix} i & r \\ s & \end{Bmatrix} \varphi^{rs},$$

$$(IV_2) \quad \psi^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} \cdot \varphi^{ki})}{\partial x_k} + \begin{Bmatrix} r & s \\ i & \end{Bmatrix} \varphi^{rs}.$$

Ist  $\varphi^{ik}$  schiefsymmetrisch, also ein Flächentensor 1. Stufe, so fällt in der letzten Formel das zweite Glied fort.

Wir bilden die Tensoren  $(II'')$  und  $(IV_2)$  insbesondere für  $\varphi^{ik} = g^{ik}$ . Benutzen wir im Punkte  $P$  ein geodätisches Koordinatensystem zur Ausrechnung, so finden wir, daß die Komponenten dieser Tensoren dort verschwinden, da ja in einem solchen Koordinatensystem die Ableitungen der  $g_{ik}$  und somit auch der  $g^{ik}$  alle  $= 0$  sind. Wenn aber die Komponenten eines Tensors in einem Koordinatensystem verschwinden, so tun sie es in jedem andern. Wir kommen so zu den Identitäten, von denen wir bei späteren Rechnungen in der Gravitationstheorie Gebrauch zu machen denken:

$$(40) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} \cdot g^{ik})}{\partial x_k} + \begin{Bmatrix} r & s \\ i & \end{Bmatrix} g^{rs} = 0,$$

$$(41) \quad \frac{\partial g^{ik}}{\partial x_l} + \begin{Bmatrix} l & r \\ i & \end{Bmatrix} g^{rk} + \begin{Bmatrix} l & r \\ k & \end{Bmatrix} g^{ir} = 0.$$

Der absolute Differentialkalkül ist bereits in der Euklidischen Geometrie von großem Nutzen, wenn man Rechnungen nicht in einem Cartesischen oder affinen, sondern in einem krummlinigen Koordinatensystem durchzuführen hat, wie das in der mathematischen Physik häufig der Fall ist. Um diese Verwendung des Tensorkalküls zu illustrieren, wollen wir die Grundgleichungen für das elektrostatische Feld und das Magnetfeld stationärer Ströme hier in allgemeinen krummlinigen Koordinaten hinschreiben.

Die kovarianten Komponenten  $E_i$  der elektrischen Feldstärke leiten sich aus einem Potential  $-\varphi$  ab nach den Formeln

$$(42) \quad E_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i};$$

sie genügen infolgedessen den invarianten Gleichungen

$$(42') \quad \frac{\partial E_i}{\partial x_k} - \frac{\partial E_k}{\partial x_i} = 0.$$

Ihre kontravarianten Komponenten

$$E^i = g^{ik} E_k$$

erfüllen die Gleichung

$$(43) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} \cdot E^i)}{\partial x_i} = \varrho,$$

in welcher  $\varrho$  die Elektrizitätsdichte bedeutet. Die Ausdrücke für die Spannungen bleiben die alten [Kap. I, Gl. (64)]. — Zum Beweise genügt die Bemerkung, daß diese Gleichungen, so wie wir sie hingeschrieben haben, absolut invarianten Charakter besitzen, für ein Cartesisches Koordinatensystem aber in die früher aufgestellten Grundgleichungen übergehen.

Das Magnetfeld stationärer elektrischer Ströme ist ein Flächentensor 1. Stufe;  $H_{ik}$  seien seine kovarianten,

$$H^{ik} = g^{ij} g^{kl} H_{jl}$$

seine kontravarianten Komponenten. Er leitet sich aus einem Vektorpotential  $\varphi_i$  ab:

$$(44) \quad H_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

und daher ist

$$(44') \quad \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial H_{ik}}{\partial x_l} = 0.$$

Sind ferner  $s^i$  die kontravarianten Komponenten des Stromvektors, so gilt außerdem

$$(45) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} H^{ik})}{\partial x_k} = s^i.$$

Man spezialisiere diese Formeln z. B. für den Fall der Kugel- und Zylinderkoordinaten; das ist ohne weitere Rechnungen möglich, sobald man den Ausdruck von  $ds^2$ , des Abstandsquadrats zweier Nachbarpunkte, in jenen Koordinaten besitzt, den man durch eine einfache infinitesimal-geometrische Betrachtung gewinnt.

Von größerer prinzipieller Wichtigkeit ist aber dies, daß wir in (42) bis (45) die Grundgesetze des stationären elektromagnetischen Feldes bereit haben für den Fall, daß wir aus irgendwelchen Gründen genötigt wären, die Euklidische Geometrie für den physikalischen Raum aufzugeben

und durch eine Riemannsche Geometrie mit anderer metrischer Fundamentalform zu ersetzen. Denn auch unter solchen allgemeineren geometrischen Verhältnissen stellen unsere Gleichungen wegen ihrer invarianten Natur »objektive«, von jedem Koordinatensystem unabhängige Aussagen über den gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen Ladung, Strom und Feld dar. Daß sie die natürliche Übertragung der im Euklidischen Raum gültigen Gesetze des stationären elektromagnetischen Feldes sind, darüber ist kein Zweifel möglich; ja, es ist geradezu wunderbar, wie einfach und zwanglos diese Übertragung sich aus dem allgemeinen Tensorkalkül ergibt. Die Frage, ob der Raum Euklidisch ist oder nicht, ist völlig irrelevant für die Gesetze des elektromagnetischen Feldes. (Die »Euklidizität« drückt sich in allgemein-invarianter Form durch Differentialgleichungen 2. Ordnung für die  $g_{ik}$  aus — siehe § 16 —, in diese Gesetze gehen aber nur die  $g_{ik}$  und deren 1. Ableitungen ein!) — Eine derartig einfache Übertragung ist aber, wohlgemerkt, nur für die *Nahewirkungsgesetze* möglich. Die Herleitung der dem Coulombschen und dem Biot-Savartschen entsprechenden Fernwirkungsgesetze aus diesen Nahewirkungsgesetzen ist eine rein mathematische Aufgabe, die im wesentlichen auf Folgendes hinauskommt: An die Stelle der gewöhnlichen Potentialgleichung  $\Delta \varphi = 0$  tritt in der Riemannschen Geometrie als ihre invariante Verallgemeinerung — siehe (42) und (43) — die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sqrt{g} \cdot g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) = 0;$$

d. i. eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, deren Koeffizienten aber keine Konstanten mehr sind. Von ihr ist die an einer beliebig vorgegebenen Stelle unendlich werdende »Grundlösung« zu ermitteln, welche der Grundlösung  $\frac{1}{r}$  der Potentialgleichung entspricht; deren Bestimmung ist ein schwieriges mathematisches Problem, das in der Theorie der partiellen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung behandelt wird. Dieselbe Aufgabe stellt sich auch schon bei Beschränkung auf den Euklidischen Raum ein, wenn man statt der Vorgänge im leeren Raum die in einem inhomogenen Medium (z. B. in einem Medium mit örtlich veränderlicher Dielektrizitätskonstante) zu untersuchen hat.

### § 16. Raumkrümmung.

Wir haben bereits oben die Frage aufgeworfen, wann das System der »totalen Differentialgleichungen« (35) integrierbar ist, d. h. wann der Satz besteht, daß ein Vektor bei Parallelverschiebung längs einer beliebigen geschlossenen Kurve zu seiner Ausgangslage zurückkehrt, und haben behauptet, daß dies nur in der Euklidischen Geometrie zutrifft; durch das Bestehen dieser Tatsache ist die Euklidische Geometrie unter allen möglichen Riemannschen Geometrien in invarianter Weise charakterisiert. Wenn Integrierbarkeit stattfindet, erhält man zu einem gegebenen Vektor im Punkte  $P$

durch Parallelverschiebung nach allen Punkten des Raumes ein Vektorfeld  $\xi^i(x_1 x_2 \dots x_n)$ , das identisch den Bedingungen (35) genügt. Für dieses Vektorfeld bestehen dann die Gleichungen

$$(46) \quad \frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} = - \left\{ \begin{matrix} j & k \\ i \end{matrix} \right\} \xi^j.$$

Setzen wir die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \xi^i}{\partial x_h} \right) = \frac{\partial}{\partial x_h} \left( \frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} \right)$$

an, so finden wir

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} j & h \\ i \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \begin{matrix} j & k \\ i \end{matrix} \right\} \right) \xi^j + \left( \left\{ \begin{matrix} r & h \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial \xi^r}{\partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} r & k \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial \xi^r}{\partial x_h} \right) = 0.$$

Führen wir darin für die Ableitungen der  $\xi$  abermals die Werte (46) ein, so erhalten wir auf der linken Seite eine Linearform der  $\xi^j$  mit den Koeffizienten

$$(47) \quad R_{j h k}^i = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} j & h \\ i \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \begin{matrix} j & k \\ i \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} r & h \\ i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j & k \\ r \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} r & k \\ i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j & h \\ r \end{matrix} \right\},$$

und es müssen also die Gleichungen bestehen

$$(48) \quad R_{j h k}^i = 0.$$

Die Theorie der Differentialgleichungen lehrt, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind für die Integrabilität des Systems (35). Die Gleichungen (48) besitzen also invarianten Charakter. Genauer aber behaupte ich, daß in jedem Riemannschen Raum  $R_{j h k}^i$  die in den Indizes  $j h k$  kovarianten, in dem Index  $i$  kontravarianten Komponenten eines Tensors 4. Stufe sind; wir sind durch unsere Fragestellung in der natürlichsten Weise auf diesen Riemannschen »Krümmungstensor«  $R$  geführt worden.

Zum Beweise nehmen wir ein beliebiges Vektorfeld mit den kovarianten Komponenten  $\varphi_i$  zu Hilfe und bilden  $\delta(\varphi_i \eta^i)$ , indem wir bei der infinitesimalen Verschiebung  $\delta$  wie immer den Vektor  $\eta$  im Punkte  $P$  ungeändert mitnehmen:

$$\delta(\varphi_i \eta^i) = \eta^i \delta \varphi_i - \varphi_i \left\{ \begin{matrix} j & h \\ i \end{matrix} \right\} \xi^j \delta x_h.$$

Darauf bilden wir, nachdem wir für  $\delta x_h$  den beliebigen Vektor  $\bar{\xi}^h$  in  $P$  eingesetzt haben, von dem Ausdruck rechter Hand in der gleichen Weise die Variation, die einer zweiten infinitesimalen Verschiebung  $d$  im gleichen Punkte entspricht. Den so entstehenden Ausdruck, in dem wir noch  $\bar{\eta}^k$  anstelle von  $d x_k$  schreiben, bezeichnen wir kurz mit  $d\delta(\varphi_i \eta^i)$ . Wenn das Symbol  $d\delta \eta^i$  entsprechend interpretiert wird, ist dann

$$\begin{aligned} d\delta(\varphi_i \eta^i) &= \eta^i d\delta \varphi_i + d\eta^i \delta \varphi_i + \delta \eta^i d\varphi_i + \varphi_i d\delta \eta^i, \\ d\delta \eta^i &= \left( -\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} j & h \\ i \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} r & h \\ i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j & k \\ r \end{matrix} \right\} \right) \eta^j \bar{\xi}^h \bar{\eta}^k - \left\{ \begin{matrix} j & h \\ i \end{matrix} \right\} \eta^j d\delta x_h. \end{aligned}$$

Bilde ich in derselben Weise den invarianten Ausdruck  $\delta d(\varphi_i \eta^i)$ , so kommt, da

$$d\delta\varphi_i = \delta d\varphi_i, \quad d\delta x_h = \delta dx_h$$

ist, durch Subtraktion, wenn  $D$  die Operation  $\delta d - d\delta$  bedeutet:

$$D(\varphi_i \eta^i) = \varphi_i D\eta^i = R_{j h k}^i \varphi_i \eta^j \bar{\xi}^h \bar{\eta}^k;$$

und damit ist unsere Behauptung erwiesen. Man beachte bei dieser Ableitung wohl, daß  $\varphi_i$  ein Vektorfeld bedeutete,  $\eta$ ,  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$  aber Vektoren im Punkte  $P$ , die bei der jeweiligen infinitesimalen Verschiebung ungeändert mitgenommen werden; das ist wegen der Nicht-Integrabilität der Bedingungen (35) ein wesentlicher Unterschied!

Wir können aber jetzt auch für  $\varphi$  einen Vektor  $\xi$  in  $P$  nehmen und haben dann in

$$\xi_i D\eta^i = R_{ij, h k} \xi^i \eta^j \bar{\xi}^h \bar{\eta}^k = F(\xi \eta \bar{\xi} \bar{\eta})$$

eine invariante Quadrilinearform. Indem wir die unabhängigen Vektoren als infinitesimale Verschiebungen auffassen, wollen wir noch setzen

$$\bar{\xi}^i = d_i x_i, \quad \eta^i = d_i x_i, \quad \bar{\xi}^i (= \delta x_i) = d_i x_i, \quad \eta^i (= dx_i) = d_i x_i$$

und jene Form mit  $F(1\ 2\ 3\ 4)$  bezeichnen. Dann besteht zunächst offenbar die Relation

$$F(1\ 2\ 4\ 3) = -F(1\ 2\ 3\ 4).$$

Um zu zeigen, daß auch

$$F(2\ 1\ 3\ 4) = -F(1\ 2\ 3\ 4)$$

ist, gehen wir davon aus, daß bei einer infinitesimalen Verschiebung  $\delta$ , bei welcher die Vektoren  $\xi$  und  $\eta$  wie immer ungeändert mitgenommen werden,

$$\delta(\xi_i \eta^i) = \delta \xi_i \cdot \eta^i + \xi_i \delta \eta^i = 0$$

ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} d\delta \xi_i \cdot \eta^i + \delta \xi_i d\eta^i + d\xi_i \delta \eta^i + \xi_i d\delta \eta^i &= 0, \\ (49) \quad \eta^i D\xi_i + \xi_i D\eta^i &= 0. \end{aligned}$$

Ist anderseits  $\varphi$  ein Vektorfeld, so ist

$$D(\varphi_i \eta^i) = D(\varphi^i \eta_i),$$

und wie wir die linke Seite  $= \varphi_i D\eta^i$  gefunden haben, so ist hier die rechte Seite  $= \eta^i D\varphi_i$ . In der so gewonnenen Relation können wir aber dann für  $\varphi$  wiederum einen beliebigen Vektor  $\xi$  in  $P$  setzen; wenn wir noch  $\xi$  und  $\eta$  vertauschen, ist also

$$\eta_i D\xi^i = \eta^i D\xi_i,$$

und damit ist unter Berücksichtigung von (49) die behauptete Gleichung

$$\eta_i D\xi^i = -\xi_i D\eta^i$$

gewonnen. — Ferner gilt auch

$$F(1\ 2\ 3\ 4) + F(1\ 3\ 4\ 2) + F(1\ 4\ 2\ 3) = 0.$$

Sie besagt in anderer Schreibweise, daß

$$(d_3 d_4 d_2 x_i - d_4 d_3 d_2 x_i) + (d_4 d_2 d_3 x_i - d_2 d_4 d_3 x_i) + (d_2 d_3 d_4 x_i - d_3 d_2 d_4 x_i) = 0$$

ist. In der Tat zerstören sich in der Summe links je zwei Terme gegenseitig, wie das durch die Haken angedeutet ist, da z. B.

$$d_3 d_2 x_i = d_2 d_3 x_i$$

gilt. Aus den bewiesenen Relationen<sup>10)</sup> folgt endlich, wie wir wissen (§ 7), die weitere

$$F(1234) = F(3412).$$

(Man kann die entsprechenden, in § 7 angegebenen Bedingungen, denen die Koeffizienten  $R$  genügen, auch durch direktes Ausrechnen bestätigen.) Die Quadrilinearform ist demnach bereits eindeutig bestimmt durch Angabe der zugehörigen quadratischen Form  $F(\delta x, dx, \delta x, dx)$  oder

$$J = \frac{1}{4} R_{ij, hk} df^{ij} df^{hk}$$

der Flächendifferentiale

$$df^{ij} = \delta x_i dx_j - \delta x_j dx_i.$$

Wir haben es also mit einem *Flächentensor 2. Stufe* zu tun, dessen Komponenten die  $R_{ij, hk}$  sind. Dividieren wir  $J$  durch das Quadrat der Größe des durch die  $df^{ij}$  charakterisierten (von den Verschiebungen  $\delta$  und  $d$  aufgespannten) Flächenelements, so hängt der Quotient, außer von der Raumstelle  $P$ , nur von dem Verhältnis der  $df^{ij}$ , d. h. nur von der Stellung des betr. Flächenelements im Punkte  $P$  ab. Dieser Quotient ist *die Krümmung des Raumes an der Stelle  $P$  in dieser Flächenrichtung*. Wenn der Raum metrisch homogen ist, muß sie = konst. sein.

Verjüngen wir  $R_{j, hk}^i$  nach  $i$  und  $j$ , so kommt 0; verjüngen wir aber nach  $i$  und  $h$ , d. h. setzen  $i = h$  und summieren über diesen Index, so muß ein Linientensor 2. Stufe entstehen. Indem wir die Indizierung noch in geeigneter Weise abändern, kommt

$$(50) \quad R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} i & r \\ & r \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_r} \left\{ \begin{matrix} i & k \\ & r \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i & r \\ s & s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k & s \\ r & r \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i & k \\ r & r \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} r & s \\ s & s \end{matrix} \right\}.$$

Nur der erste Term auf der rechten Seite läßt hier die Symmetrie in bezug auf  $i$  und  $k$  nicht unmittelbar erkennen; er ist aber

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\lg g)}{\partial x_i \partial x_k}.$$

In der Gravitationstheorie wird nur dieser verjüngte »*Linientensor Krümmung*«  $R_{ik}$  auftreten. Er ist ein Differentialausdruck 2. Ordnung in den  $g_{ik}$ , der die 2. Ableitungen linear enthält. Aus ihm können wir schließlich noch durch abermalige Verjüngung die »*Invariante Krümmung*«

$$R = g^{ik} R_{ik}$$

bilden.

Geometrische Deutungen der Riemannschen Krümmung ergeben sich aus dem Zusammenhang, in dem sie mit der Änderung steht, die ein Vektor bei Parallelverschiebung längs einer geschlossenen Kurve erfährt.

Wir wollen jedoch darauf nicht näher eingehen<sup>17)</sup>. Doch sei es noch gestattet, kurz den einfachsten Weg zu skizzieren, auf dem man beweisen kann, daß die *quadratische Krümmungsform*  $J$  *nur für die Euklidische Geometrie verschwindet*. Wenn  $J = 0$  ist, kann man einen im Punkte  $P$  gegebenen Vektor in eindeutig bestimmter Weise »ungeändert« nach jedem Raumpunkt verpflanzen; es hat dann einen Sinn, von »demselben« Vektor in zwei beliebigen Raumpunkten zu reden. Erteilen wir jedem Raumpunkt eine infinitesimale Verschiebung in solcher Weise, daß der unendlichkleine Verschiebungsvektor in allen Punkten »derselbe« ist, so haben wir eine infinitesimale *Gesamt-Translation* des Raumes vorgenommen. Diese »Translationen« erfüllen die Axiome, welche wir in Kap. I, § 2 für die Vektoren formuliert haben. Durch genügend oftmalige Wiederholung einer infinitesimalen erhalten wir eine endliche Translation. Dadurch werden wir, wenn wir von  $n$  infinitesimalen Translationen in  $n$  unabhängigen Richtungen ausgehen, zu einem bestimmten »translativen« Koordinatensystem geführt; in ihm hat eine infinitesimale Translation in allen Punkten die gleichen Komponenten. Legen wir dieses Koordinatensystem zugrunde, so sind also die Gleichungen (35) identisch erfüllt, wenn wir die  $\xi^i$  konstant nehmen, d. h. es ist identisch  $\left\{ \begin{smallmatrix} r & s \\ i \end{smallmatrix} \right\} = 0$ , und folglich sind die

Koeffizienten  $g_{ik}$  der metrischen Fundamentalform in jenen translativen Koordinaten konstant. Diese Überlegungen lassen sich Schritt für Schritt in das Gewand der Analysis kleiden und strenge durchführen. Wir wollen uns aber dabei, da der in Rede stehende Satz in der Physik keine Anwendung findet, nicht länger aufhalten.

Es wird manchen entsetzt haben, von welcher Sintflut von Formeln und Indizes hier der leitende Gedanke der Riemannschen Geometrie überschwemmt wurde. Es ist gewiß bedauerlich, daß wir uns um das rein Formale so ausführlich bemühen und ihm einen solchen Platz einräumen müssen; aber es läßt sich nicht vermeiden. Wie jeder Sprache und Schrift mühsam erlernen muß, ehe er sie mit Freiheit zum Ausdruck seiner Gedanken gebrauchen kann, so ist auch hier der einzige Weg, den Druck der Formeln von sich abzuwälzen, der, das Werkzeug der Tensoranalysis so in seine Gewalt zu bringen, daß man sich durch das Formale unbehindert den wahrhaften Problemen zuwenden kann, die uns beschäftigen: Einsicht in das Wesen von Raum, Zeit und Materie zu gewinnen, sofern sie am Aufbau der objektiven Wirklichkeit beteiligt sind. Für den, der auf solche Ziele aus ist, müßte es eigentlich heißen: das Mathematische versteht sich immer von selbst.

Unsere Arbeit wird nicht vergeblich gewesen sein. Nicht um seiner selbst willen ist dieser Holzstoß von Formeln von uns errichtet worden, sondern: wenn der Blitz des Gedankens niederfährt, wird er ihn entzünden zu einem Feuer, das ringsum das Land erleuchtet, und nicht in einem trüben Sumpf vager, gestaltloser Vorstellungen verzischt. — Ein paar letzte Reisege müssen wir noch dazuworfen.

## § 17. Die geodätischen Linien als kürzeste.

Wir wollen zeigen, daß die geodätische Linie, wie die Gerade in der Euklidischen Geometrie, nicht nur die Differentialeigenschaft besitzt, ihre Richtung unverändert beizubehalten, sondern auch die *Integraleigenschaft*, daß jedes Stück von ihr kürzeste Verbindungslinie seines Anfangs- und Endpunktes ist. Doch ist diese Aussage nicht ganz wörtlich zu verstehen, sondern in demselben Sinne, wie wir etwa in der Mechanik sagen, daß im Gleichgewicht die potentielle Energie ein Minimum ist, oder von einer Funktion  $F(xy)$  zweier Variablen sagen, sie habe dort ein Minimum, wo ihr Differential

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

identisch in  $dx, dy$  verschwindet; während es in Wahrheit heißen muß, daß sie dort einen »stationären« Wert annimmt, der sowohl ein Minimum wie ein Maximum wie auch ein »Sattelwert« sein kann. Die geodätische Linie ist nicht notwendig eine Kurve kürzester, wohl aber eine Kurve stationärer Länge. Auf der Kugeloberfläche z. B. sind die größten Kreise die geodätischen Linien; nehmen wir auf einem solchen Kreis zwei Punkte  $A$  und  $B$  an, so ist der kleinere der beiden Bögen  $AB$  zwar in der Tat kürzeste Verbindungslinie von  $A$  und  $B$ ; aber auch der andere Bogen ist eine geodätische Verbindungslinie von  $A$  und  $B$ , er hat nicht kürzeste, sondern stationäre Länge.

Gegeben sei eine beliebige Kurve in Parameterdarstellung

$$x_i = x_i(s), \quad (\alpha \leq s \leq \beta)$$

die »Ausgangskurve«. Um sie mit Nachbarkurven zu vergleichen, betrachten wir ferner eine beliebige einparametrische Kurvenschar

$$x_i = x_i(s; \varepsilon) \quad (\alpha \leq s \leq \beta).$$

Der Parameter  $\varepsilon$  variiert in einem Intervall um  $\varepsilon = 0$ ;  $x_i(s; \varepsilon)$  solle Funktionen sein, die sich für  $\varepsilon = 0$  auf  $x_i(s)$  reduzieren. Da alle Kurve der Schar den gleichen Anfangspunkt mit dem gleichen Endpunkt verbinden sollen, sind  $x_i(\alpha; \varepsilon)$  und  $x_i(\beta; \varepsilon)$  unabhängig von  $\varepsilon$ . Die Länge einer solchen Kurve ist gegeben durch

$$L(\varepsilon) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{F} ds,$$

wo

$$F = g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds}.$$

Wir nehmen noch an, daß  $s$  für die Ausgangskurve die Bogenlänge deutet, somit  $F = 1$  ist für  $\varepsilon = 0$ . Die Richtungskomponenten  $\frac{dx_i}{ds}$

die Ausgangskurve  $\varepsilon = 0$  mögen mit  $u^i$  bezeichnet werden. Wir setzen ferner

$$\varepsilon \cdot \left( \frac{dx_i}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \xi^i(s) = \delta x_i;$$

das sind die Komponenten der »unendlich kleinen« Verschiebung, durch welche die Ausgangskurve in die einem unendlich kleinen Wert von  $\varepsilon$  entsprechende »varierte« Nachbarkurve übergeht; sie verschwinden an den Enden.

$$\varepsilon \left( \frac{dL}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \delta L$$

ist die zugehörige Variation der Länge.  $\delta L = 0$  ist die Bedingung dafür, daß die Ausgangskurve in der Kurvenschar stationäre Länge besitzt. Wenden wir das Zeichen  $\delta F$  im gleichen Sinne an, so ist

$$(51) \quad \delta L = \int_a^b \frac{\delta F}{2\sqrt{F}} ds = \frac{1}{2} \int_a^b \delta F ds,$$

da für die Ausgangskurve  $F = 1$  ist. Bei der gewählten Parameterdarstellung hat für diese also auch das Integral  $\int F ds$  einen stationären Wert. Es ist

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \frac{\partial g_{hl}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\varepsilon} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds} + 2 g_{ik} \frac{dx_k}{ds} \frac{d^2 x_i}{d\varepsilon ds}$$

und also (im zweiten Glied werden »Variation« und »Differentiation«, d. h. die Differentiationen nach  $\varepsilon$  und  $s$  vertauscht)

$$\delta F = \frac{\partial g_{hl}}{\partial x_i} u^h u^l \xi^i + 2 g_{ik} u^k \frac{d\xi^i}{ds}.$$

Setzen wir dies in (51) ein und formen das zweite Glied durch eine partielle Integration um unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die  $\xi^k$  an den Enden des Integrationsintervalls verschwinden, so kommt

$$\delta L = \int_a^b \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{hl}}{\partial x_i} u^h u^l - \frac{d}{ds} (g_{ik} u^k) \right\} \xi^i ds.$$

Die Bedingung  $\delta L = 0$  ist demnach dann und nur dann für jede beliebige Kurvenschar erfüllt, wenn

$$\frac{d}{ds} (g_{ik} u^k) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{hl}}{\partial x_i} u^h u^l$$

ist. Setzt man hier die linke Seite

$$= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} u^l u^k + g_{ik} \frac{du^k}{ds},$$

so ergeben sich die Gleichungen (37) der geodätischen Linie.

Die Eigenschaft, ihre Richtung unverändert beizubehalten, erscheint uns als die wesentlichste der geodätischen Linie. Es ist aber im Hinblick auf spätere physikalische Anwendungen von Wert, sie durch ein Variationsprinzip charakterisieren zu können.

## Kapitel III.

## Relativität von Raum und Zeit.

## § 18. Das Galileische Relativitätsprinzip.

Schon in der Einleitung ist besprochen worden, in welcher Weise wir mittels einer Uhr die Zeit messen und nach Wahl eines beliebigen Anfangspunktes in der Zeit und einer Zeiteinheit jeden Zeitpunkt durch eine Zahl  $t$  charakterisieren können. Aber in der *Verbindung von Raum und Zeit* liegen neue schwierige Probleme, welche den Gegenstand der Relativitätstheorie bilden; ihre Lösung, eine der größten Taten der menschlichen Geistesgeschichte, knüpft sich vor allem an die Namen *Kopernikus* und *Einstein*.<sup>1)</sup>

Durch eine Uhr werden unmittelbar nur die zeitlichen Verhältnisse solcher Ereignisse festgelegt, die jeweils gerade dort geschehen, wo sich die Uhr befindet. Indem ich aber als naiver Mensch mit voller Selbstverständlichkeit die Dinge, die ich sehe, in den Zeitpunkt ihrer Wahrnehmung setze, dehne ich meine Zeit über die ganze Welt aus: ich glaube, daß es einen objektiven Sinn hat, von einem Ereignis, das irgendwo vor sich geht, zu behaupten, es geschehe »jetzt!« (in dem Augenblick, in dem ich das Wort ausspreche); daß es einen objektiven Sinn hat, von irgend zwei an verschiedenen Orten vorgefallenen Ereignissen zu fragen, ob das eine früher oder später als das andere geschehen sei. *An dieser These wollen wir hier zunächst festhalten.* Jedes raum-zeitlich streng lokalisierte Ereignis, wie etwa das Aufblitzen eines sofort wieder verlöschenden Fünkchens, geschieht in einem bestimmten Raum-Zeit-Punkt oder *Weltpunkt*: »hier-jetzt«. Nach der eben ausgesprochenen These kommt jedem Weltpunkt eine bestimmte Zeitkoordinate  $t$  zu.

Nun handelt es sich weiter darum, den *Ort* eines derartigen Punkt-eignisses im Raume festzulegen. Wir schreiben z. B. zwei Massenpunkten in einem bestimmten Moment eine Entfernung zu. Wir nehmen also an, daß die Weltpunkte, die einem bestimmten Moment  $t$  entsprechen, eine dreidimensionale Punktmannigfaltigkeit bilden, in welcher die Euklidische Geometrie gilt (wir greifen, was den Raum betrifft, in diesem Kapitel wieder auf den Standpunkt von Kap. I zurück). Wir wählen eine bestimmte Maßeinheit für die Länge und ein rechtwinkliges Koordinatensystem im Momente  $t$  (etwa eine bestimmte Ecke des Hörsaals). Dann kommen jedem Weltpunkt, dessen Zeitkoordinate den Wert  $t$  hat, drei bestimmte Raumkoordinaten  $x_1, x_2, x_3$  zu.

Fassen wir aber jetzt einen andern Moment  $t'$  ins Auge. Wir nehmen an, es habe einen objektiven Sinn, zu sagen, wir messen im Momente  $t'$  mit der gleichen Längeneinheit wie im Momente  $t$  (mittels eines »starren«, sowohl zur Zeit  $t$  wie zur Zeit  $t'$  vorhandenen Maßstabes); diese Längen-

einheit sei neben der Zeiteinheit ein für allemal fest angenommen (cm, sec). Dann können wir aber noch die Lage des Cartesischen Koordinatensystems wiederum beliebig wählen, unabhängig von der Wahl zur Zeit  $t$ . Erst wenn wir der Überzeugung sind, es habe einen objektiven Sinn, von zwei zu beliebigen Zeiten geschehenden, »punktförmigen« Ereignissen zu behaupten, sie geschehen an *derselben* Raumstelle, von einem Körper zu behaupten, daß er *ruhe*, können wir die Lage des Koordinatensystems zu allen Zeiten auf Grund der willkürlich gewählten Lage in einem bestimmten Moment objektiv, ohne neue Aufweisungen individueller Gegenstände festlegen: nämlich durch die Forderung, daß das Koordinatensystem dauernd ruhe. Dann bekommen wir also nach Wahl eines Anfangspunktes der Zeitrechnung und eines Cartesischen Koordinatensystems in diesem Anfangsmoment zu jedem Weltpunkt vier bestimmte Koordinaten: die Zeitkoordinate  $t$  und die Raumkoordinaten  $x_1, x_2, x_3$ .

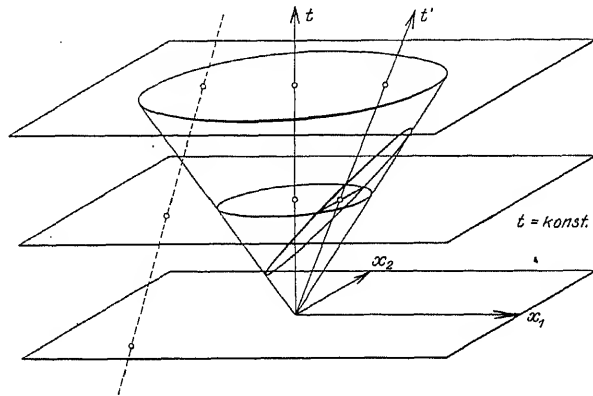


Fig. 7.

Um der Möglichkeit der graphischen Darstellung willen unterdrücken wir eine Raumkoordinate, nehmen den Raum somit nur zweidimensional, als eine Euklidische Ebene an.

Wir verfertigen uns ein graphisches Bild, indem wir in einem Raum mit dem rechtwinkligen Achsenkreuz  $x_1, x_2, t$  den Weltpunkt durch einen Bildpunkt mit den Koordinaten  $x_1, x_2, t$  repräsentieren. Von allen sich bewegenden Massenpunkten können wir dann in diesem Bilde den »graphischen Fahrplan« konstruieren; die Bewegung eines jeden wird dargestellt durch eine »Weltlinie«, deren Richtung beständig eine positive Komponente in Richtung der  $t$ -Achse besitzt. Die Weltlinien ruhender Massenpunkte sind Gerade parallel zur  $t$ -Achse; die Weltlinie eines in gleichförmiger Translation begriffenen Massenpunktes ist eine Gerade. In einem Schnitt  $t = \text{konst.}$  kann die Lage aller Massenpunkte im gleichen Moment  $t$  abgelesen werden. Wählen wir Anfangspunkt der Zeitrechnung und Cartesisches Koordinatensystem auf eine andere Weise und sind

$x_1, x_2, t$ ;  $x'_1, x'_2, t'$  die Koordinaten eines willkürlichen Weltpunktes bei der ersten und zweiten Wahl des Koordinatensystems, so gelten Transformationsformeln

$$(I) \quad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11} x'_1 + \alpha_{12} x'_2 + \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_{21} x'_1 + \alpha_{22} x'_2 + \alpha_2 \\ t = t' + a, \end{cases}$$

wo die  $\alpha$  und  $a$  Konstante bedeuten, die  $\alpha_{ik}$  aber insbesondere die Koeffizienten einer orthogonalen Transformation bilden. Die Weltkoordinaten sind also in objektiver Weise, ohne Hinweis auf individuelle Gegenstände oder Geschehnisse festgelegt *bis auf eine beliebige Transformation von dieser Gestalt*. Dabei ist noch abgesehen von der willkürlichen Wahl der beiden Maßeinheiten. Bleibt der Anfangspunkt in Raum und Zeit ungeändert:  $\alpha_1 = \alpha_2 = a = 0$ , so sind  $x'_1, x'_2, t'$  die Koordinaten in bezug auf ein geradliniges Achsensystem, dessen  $t'$ -Achse mit der  $t$ -Achse zusammenfällt, während die Achsen  $x'_1, x'_2$  aus  $x_1, x_2$  durch eine Drehung in ihrer Ebene  $t = 0$  hervorgehen.

Schon eine geringe Besinnung zeigt, daß die eine der angenommenen Voraussetzungen: der Begriff der Ruhe habe einen objektiven Inhalt, nicht zutreffend ist. Wenn ich mit jemandem eine Verabredung treffe, wir wollen uns morgen an »derselben« Stelle wieder treffen wie heute, so heißt das: in derselben materiellen Umgebung, an dem gleichen Gebäude in der gleichen Straße (die nach Kopernikus morgen ganz wo anders im Weltenraum sich befindet als heute); und das hat seinen guten Sinn zufolge des glücklichen Umstandes, daß wir hineingeboren sind in eine wesentlich stabile Umwelt, in der alle Veränderung sich anschließt an einen viel umfassenderen Bestand, der seine (teils unmittelbar wahrgenommene, teils erschlossene) Beschaffenheit unverändert oder fast unverändert bewahrt. Die Häuser stehen still; das Schiff fährt mit soundsoviel Knoten Geschwindigkeit: das verstehen wir im täglichen Leben immer relativ zu der »dauernden wohlgegründeten Erde«. *Objektive Bedeutung haben nur die relativen Bewegungen der Körper (Massenpunkte) zueinander*, d. h. die Entfernungen und Winkel, welche sich aus den gleichzeitigen Lagen der Massenpunkte bestimmen, in ihrer funktionalen Abhängigkeit von der Zeit. Es ist also jedes (der Anschaulichkeit wegen materiell gedachte) dauernd vorhandene Cartesische Koordinatensystem jedem andern gleichberechtigt. Der Zusammenhang der Koordinaten desselben Weltpunktes mit Bezug auf das eine und das andere zweier solchen Systeme wird durch Formeln geliefert:

$$(II) \quad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}(t') x'_1 + \alpha_{12}(t') x'_2 + \alpha_1(t'), \\ x_2 = \alpha_{21}(t') x'_1 + \alpha_{22}(t') x'_2 + \alpha_2(t'), \\ t = t' + a, \end{cases}$$

wo die  $\alpha_i$  und  $\alpha_{ik}$  irgendwelche stetige Funktionen von  $t'$  sein können, von denen die  $\alpha_{ik}$  für alle Werte von  $t'$  die Koeffizienten einer orthogonalen

Transformation bilden. Tragen wir die Flächen  $t' = \text{konst.}$  sowie  $x'_1 = \text{konst.}$  und  $x'_2 = \text{konst.}$  in unsere graphische Darstellung ein, so sind zwar die Flächen der ersten Schar wiederum Ebenen, die mit den Ebenen  $t = \text{konst.}$  zusammenfallen, hingegen die beiden andern sind krumme Flächen; die Transformationsformeln sind nicht mehr linear.

Unter diesen Umständen kann es sich bei der Untersuchung der Bewegung eines Systems von Massenpunkten, etwa der Planeten, nur darum handeln, das Koordinatensystem so zu wählen, daß die Funktionen  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , welche die Raumkoordinaten der Massenpunkte in Abhängigkeit von der Zeit darstellen, möglichst einfach werden oder doch möglichst einfachen Gesetzen genügen. Dies war die von Kepler außerordentlich vertiefte Entdeckung des Kopernikus, daß in der Tat ein Koordinatensystem existiert, für das die Gesetze der Planetenbewegung eine ungeheuer viel einfachere und durchsichtigere Form annehmen, als wenn man sie auf die ruhende Erde bezieht. Die Tat des Kopernikus wurde vor allem dadurch zur Weltanschauungswende, daß *er sich von dem Glauben an die absolute Bedeutung der Erde frei machte*. Seine Betrachtungen wie auch die Keplers sind rein *kinematischer* Natur. Newton krönte ihr Werk, indem er den wahren Grund für die kinematischen Keplerschen Gesetze in dem *dynamischen* Grundgesetz der Mechanik und dem Attraktionsgesetz auffand. Man weiß, wie glänzend sich diese Newtonsche Mechanik am Himmel und auf Erden bestätigt hat. Da ihr, wie wir überzeugt sind, universelle, nicht auf das Planetensystem beschränkte Geltung zukommt, ihre Gesetze aber keineswegs invariant gegenüber den Transformationen (II) sind, so wird durch sie in absoluter, von jedem Hinweis auf individuelle Gegenständlichkeit unabhängiger Weise eine viel vollständigere Festlegung des Koordinatensystems möglich als auf Grund der zu dem »Relativitätsprinzip« (II) führenden kinematischen Auffassung.

An der Spitze der Mechanik steht das *Galileische Trägheitsprinzip*: Ein Massenpunkt, der sich kräftefrei, ohne jede Einwirkung von außen bewegt, führt eine gleichförmige Translation aus. Seine Weltlinie ist mithin eine Gerade, die Raumkoordinaten  $x_1$ ,  $x_2$  des Massenpunktes lineare Funktionen der Zeit  $t$ . Gilt dieses Prinzip in bezug auf die beiden durch (II) verbundenen Koordinatensysteme, so müssen also  $x_1$  und  $x_2$  in lineare Funktionen von  $t'$  übergehen, wenn man für  $x'_1$ ,  $x'_2$  lineare Funktionen von  $t'$  einsetzt. Daraus folgt ohne weiteres, daß die  $\alpha_{ik}$  Konstante und  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  lineare Funktionen von  $t$  sein müssen; d. h. das eine Cartesische Raumkoordinatensystem bewegt sich relativ zu dem andern in gleichförmiger Translation. Und nun zeigt sich umgekehrt: liegen zwei *solche* Koordinatensysteme  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{C}'$  vor und gilt das Trägheitsprinzip und die Newtonsche Mechanik in bezug auf  $\mathfrak{C}$ , so gilt sie auch in bezug auf  $\mathfrak{C}'$ . Zwei für die Mechanik »zulässige« Koordinatensysteme hängen demnach durch die Formeln zusammen

$$(III) \quad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11} x'_1 + \alpha_{12} x'_2 + \gamma_1 t' + \alpha_1, \\ x_2 = \alpha_{21} x'_1 + \alpha_{22} x'_2 + \gamma_2 t' + \alpha_2, \\ t = t' + a, \end{cases}$$

in denen die  $\alpha_{ik}$  konstante Koeffizienten einer orthogonalen Transformation sind,  $a$ ,  $\alpha_i$  und  $\gamma_i$  aber beliebige Konstante; und jede Transformation von dieser Art stellt den Übergang von einem zulässigen Koordinatensystem zu einem andern dar (*Galilei-Newtonsches Relativitätsprinzip*). Das Wesentliche daran ist, wenn wir von der ja selbstverständlichen Willkürlichkeit der Achsenrichtungen im Raum und des Anfangspunktes absehen, daß Invarianz stattfindet gegenüber den Transformationen

$$(1) \quad x_1 = x'_1 + \gamma_1 t', \quad x_2 = x'_2 + \gamma_2 t', \quad t = t'.$$

In unserm graphischen Bild (s. Fig. 7) würden  $x'_1, x'_2, t'$  die Koordinaten in bezug auf ein geradliniges Achsenkreuz sein, bei welchem die  $x'_1, x'_2$  mit den  $x_1, x_2$  Achsen zusammenfallen, hingegen die neue  $t'$ -Achse eine irgendwie geänderte Richtung hat. Daß sich die Gesetze der Newtonschen Mechanik bei diesem Übergang vom Koordinatensystem  $\mathcal{C}$  zu  $\mathcal{C}'$  nicht ändern, sehen wir so ein. Nach dem Attraktionsgesetz ist die Gravitationskraft, mit der ein Massenpunkt in einem Augenblicke auf einen andern wirkt, ein vom Koordinatensystem unabhängiger Vektor im Raum (so wie der Vektor, welcher die simultanen Lagen der beiden Massenpunkte miteinander verbindet). Dieselbe Größennatur muß auch jede Kraft von anderer physikalischer Herkunft besitzen, das gehört mit zu den Voraussetzungen der Newtonschen Mechanik; sie verlangt zur Ausfüllung ihres Kraftbegriffs eine dieser Voraussetzung genügende Physik. Man überzeuge sich etwa in der Elastizitätstheorie davon, daß die Spannungskräfte (zufolge ihres Zusammenhanges mit den Deformationsgrößen) von der geforderten Art sind. — Die Masse ist ein vom Koordinatensystem unabhängiger Skalar. Endlich ist wegen der aus (1) für die Bewegung eines Massenpunktes sich ergebenden Transformationsformeln

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx'_1}{dt'} + \gamma_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx'_2}{dt'} + \gamma_2; \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d^2 x'_1}{dt'^2}, \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{d^2 x'_2}{dt'^2}$$

zwar nicht die Geschwindigkeit, wohl aber die Beschleunigung ein vom Koordinatensystem unabhängiger Raumvektor. Demnach hat das Grundgesetz »Masse mal Beschleunigung = Kraft« die behauptete invariante Beschaffenheit.

Nach der Newtonschen Mechanik bewegt sich der Schwerpunkt jedes abgeschlossenen, keiner Einwirkung von außen unterliegenden Massensystems in gleichförmiger Translation. Betrachten wir die Sonne mit ihren Planeten als ein solches System, so hat es also keinen Sinn, zu fragen, ob der Schwerpunkt des Sonnensystems ruht oder sich in gleichförmiger Translation befindet. Wenn die Astronomen trotzdem behaupten, daß die Sonne sich auf einen Punkt im Sternbild des Herkules zu bewege, so stützen sie diese ihre Behauptung auf die statistische Beobachtung, daß die Sterne in jener Gegend sich im Durchschnitt von einem gewissen Zentrum aus zu entfernen scheinen — so wie eine Baumgruppe auseinander tritt, der ich mich nähere; daraus folgt ihre Aussage, wenn es sicher ist, daß die Sterne im Durchschnitt ruhen, d. h. daß der Schwer-

punkt des Fixsternhimmels ruht: es handelt sich also um eine Aussage über die relative Bewegung des Schwerpunktes des Sonnensystems zu dem des Fixsternhimmels.

Man muß sich, um den wahren Sinn des Relativitätsprinzips aufzufassen, durchaus daran gewöhnen, nicht »im Raum« und nicht »in der Zeit«, sondern »in der Welt«, in *Raum-Zeit* zu denken. Nur das Zusammenfallen (bzw. das unmittelbare Benachbartsein) zweier Ereignisse in Raum-Zeit hat einen unmittelbar evidenten Sinn; daß sich hier Raum und Zeit nicht in absoluter Weise voneinander trennen lassen, ist eben die Behauptung des Relativitätsprinzips. Im Sinne der mechanischen Weltauffassung, nach der alles physikalische Geschehen letztlich auf Mechanik zurückgeht, nehmen wir an, daß nicht nur die Mechanik, sondern die gesamte physikalische Gesetzmäßigkeit der Natur dem Galilei-Newtonschen Relativitätsprinzip untertan ist, *daß es also unmöglich ist, ohne Aufweisung individueller Gegenständlichkeiten unter den für die Mechanik gleichberechtigten Bezugssystemen, von denen je zwei durch Transformationsformeln (II) verknüpft sind, eine engere Auswahl zu treffen.* Dann wird durch diese Formeln in genau dem gleichen Sinne *die Geometrie der vierdimensionalen Welt* festgelegt, wie durch die Gruppe der Übergangssubstitutionen, die zwischen zwei Cartesischen Koordinatensystemen vermitteln, die Euklidische Geometrie des dreidimensionalen Raumes festgelegt wird: eine Beziehung zwischen Weltpunkten hat dann und nur dann eine objektive Bedeutung, wenn sie durch solche arithmetische Relationen zwischen den Koordinaten der Punkte definiert ist, die invariant sind gegenüber den Transformationen (II). Vom Raume sagt man, er sei *homogen* in allen Punkten und in jedem Punkte homogen in allen Richtungen; diese Behauptungen sind aber nur Teile der *vollständigen Homogeneitätsaussage*, daß alle Cartesischen Koordinatensysteme gleichberechtigt sind. Ebenso wird durch das Relativitätsprinzip festgestellt, in welchem genauen Sinne die Welt (= Raum-Zeit als »Form« der Erscheinungen, nicht ihrem »zufälligen«, inhomogenen materialen Gehalt nach) homogen ist.

Es ist merkwürdig genug, daß zwei mechanische Vorgänge, die kinematisch vollständig gleich sind, in dynamischer Hinsicht verschieden sein können, wie die Gegenüberstellung des viel weiteren kinematischen Relativitätsprinzips (II) und des dynamischen (III) lehrt: eine für sich allein existierende rotierende Flüssigkeitskugel oder ein rotierendes Schwungrad ist an sich nicht von einer ruhenden Kugel oder einem ruhenden Schwungrad verschieden; trotzdem plattet sich die »rotierende« Kugel ab, die ruhende nicht; trotzdem treten in dem rotierenden Schwungrad Spannungen auf, ja es zerspringt bei hoher Rotationsgeschwindigkeit, an einem ruhenden geschieht nichts dergleichen. Als die Ursache dieses verschiedenen Verhaltens können wir nur die »*Weltmetrik*« bezeichnen, die sich in den Zentrifugalkräften als eine wirkende Potenz offenbart. Von hier aus fällt ein helles Licht zurück auf den Riemannschen Gedanken: wenn

der Metrik (hier freilich der Weltmetrik, nicht dem metrischen Fundamental-tensor des Raumes) etwas genau so Reales, durch Kräfte auf die Materie Wirkendes entspricht wie etwa dem Maxwell'schen Spannungstensor, so muß man annehmen, daß auch umgekehrt die Materie auf dieses Reale zurückwirkt. Erst in Kap. IV werden wir diese Idee wieder aufnehmen.

An den Transformationsformeln (III) heben wir zunächst nur ihre Linearität hervor: sie besagt, daß *die Welt ein vierdimensionaler affiner Raum* ist. Zur systematischen Darstellung seiner Geometrie benutzen wir demnach neben den Weltpunkten die *Welt-Vektoren* oder Verschiebungen. Eine Verschiebung der Welt ist eine Abbildung, die jedem Weltpunkt  $P$  einen Weltpunkt  $P'$  zuordnet; aber eine Abbildung von besonderer Art, nämlich eine solche, die sich in einem zulässigen Koordinatensystem durch Gleichungen

$$x'_i = x_i + a_i \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

ausdrückt; dabei bedeuten  $x_i$  die vier Zeit-Raum-Koordinaten von  $P$  (es ist  $x_0$  anstelle von  $t$  geschrieben),  $x'_i$  diejenigen von  $P'$  in jenem Koordinatensystem, die  $a_i$  sind irgendwelche Konstanten. Der Begriff ist unabhängig von der Wahl des zulässigen Koordinatensystems. Die Verschiebung, welche  $P$  in  $P'$  überführt, wird mit  $\overrightarrow{PP'}$  bezeichnet. Es gelten für die Welt-Punkte und -Verschiebungen die sämtlichen Axiome der affinen Geometrie mit der Dimensionszahl  $n = 4$ . Das Galileische Trägheitsprinzip ist ein affines Gesetz; es sagt, durch welche Bewegungen die geraden Linien unseres vierdimensionalen affinen Raums »Welt« realisiert werden, nämlich durch die kräftefrei sich bewegenden Massenpunkte.

Von dem *affinen* Standpunkt gehen wir zum *metrischen* über. Aus unserer graphischen Darstellung, die (mit Unterdrückung einer Koordinate) ein affines Bild der Welt entwarf, lesen wir ihre wesentliche metrische Struktur ab, die ganz anders ist als die des Euklidischen Raumes: die Welt ist »geschichtet«; die Ebenen  $t = \text{konst.}$  in ihr haben eine absolute Bedeutung. Nach Wahl einer Maßeinheit für die Zeit kommt je zwei Weltpunkten  $A, B$  ein bestimmter Zeitunterschied zu, die Zeitkomponente des Vektors  $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{x}$ ; sie ist, wie allgemein die Vektorkomponenten in einem affinen Koordinatensystem, eine lineare Form  $t(\mathfrak{x})$  des willkürlichen Vektors  $\mathfrak{x}$ . Der Vektor  $\mathfrak{x}$  weist in die Vergangenheit oder die Zukunft, je nachdem  $t(\mathfrak{x})$  negativ oder positiv ist. Von zwei Weltpunkten  $A, B$  ist  $A$  früher, gleichzeitig oder später als  $B$ , je nachdem

$$t(\overrightarrow{AB}) > 0, = 0 \text{ oder } < 0$$

ausfällt. — In jeder »Schicht« aber gilt die Euklidische Geometrie; sie beruht auf einer definiten quadratischen Form, die jedoch hier nur definiert ist für diejenigen Weltvektoren  $\mathfrak{x}$ , die in einer Schicht liegen, d. h. der Gleichung  $t(\mathfrak{x}) = 0$  genügen (denn es hat nur einen Sinn, von dem Abstand der *gleichzeitigen* Lagen zweier Massenpunkte zu reden). Während also der Euklidischen Metrik eine positiv-definite quadratische Form zugrunde liegt, *beruht die Galileische Metrik*

1. auf einer Linearform  $t(\xi)$  des willkürlichen Vektors  $\xi$  (der »Zeitdauer« der Verschiebung  $\xi$ ), und

2. einer nur innerhalb der dreidimensionalen linearen Mannigfaltigkeit aller Vektoren  $\xi$ , welche der Gleichung  $t(\xi) = 0$  genügen, definierten positiv-definiten quadratischen Form  $(\xi\xi)$  (dem Quadrat der »Länge« von  $\xi$ ).

Zur anschaulichen Darlegung physikalischer Verhältnisse können wir die Einführung eines bestimmten Bezugsraumes nicht entbehren. Sie hängt ab von der Wahl einer willkürlichen Verschiebung  $e$  in der Welt (derjenigen, in welche bei der graphischen Darstellung die Zeitachse hineinfällt) und wird dann durch die Übereinkunft bewerkstelligt, daß alle Weltpunkte, die auf einer Geraden der Richtung  $e$  liegen, in denselben Raumpunkt fallen. Es handelt sich also, geometrisch gesprochen, um nichts anderes als den Vorgang der *Parallelprojektion*. Zum Zwecke einer angemessenen Formulierung schicke ich darüber einige geometrische Erörterungen voraus, die sich auf einen beliebigen  $n$ -dimensionalen affinen Raum beziehen. Knüpfen wir im Interesse der Anschaulichkeit zunächst an den Fall  $n = 3$  an. Es sei im Raum eine Schar von Geraden gezogen, die dem Vektor  $e (\neq 0)$  parallel sind. Blickt jemand in Richtung dieser Strahlen in den Raum hinein, so werden für ihn alle diejenigen Raumpunkte zusammenfallen, die in Richtung einer solchen Geraden hintereinander liegen; dabei ist es durchaus nicht nötig, eine Ebene zu geben, auf die projiziert wird. Wir definieren also:

Es sei gegeben ein von 0 verschiedener Vektor  $e$ . Von zwei Punkten  $A$  und  $A'$ , für die  $\overrightarrow{AA'}$  ein Multiplum von  $e$  ist, werde gesagt, sie fallen in ein und denselben Punkt  $A$  des durch  $e$  bestimmten Unterraums. Wir können  $A$  darstellen durch die zu  $e$  parallele Gerade, auf der alle jene im Unterraum zusammenfallenden Punkte  $A, A', \dots$  liegen. Da jede Verschiebung  $\xi$  des Raumes eine zu  $e$  parallele Gerade wieder in eine solche überführt, ruft  $\xi$  eine bestimmte Verschiebung  $\xi$  des Unterraums hervor; aber je zwei Verschiebungen  $\xi, \xi'$  fallen im Unterraum zusammen, wenn ihr Unterschied ein Multiplum von  $e$  ist. Der Übergang zum Unterraum, die »Projektion in Richtung von  $e$ «, werde an den Symbolen für Punkte und Verschiebungen durch Fettdruck gekennzeichnet. Durch Projektion gehen

$$\lambda\xi, \xi + \eta, \overrightarrow{AB} \text{ über in } \lambda\xi, \xi + \eta, \overrightarrow{AB};$$

d. h. die Projektion trägt affinen Charakter, und im Unterraum gilt die affine Geometrie mit einer um 1 geringeren Dimensionszahl als im ursprünglichen »Vollraum«.

Ist der Raum ein *metrischer* im Euklidischen Sinne, d. h. liegt ihm als metrische Fundamentalform eine nicht-ausgeartete quadratische Form  $Q(\xi) = (\xi\xi)$  zugrunde — für die Anschauung halte man sich an den Fall, wo  $Q$  positiv-definit ist, die Ausführungen gelten aber allgemein —, so werden wir den beiden Punkten des Unterraums, als die wir zwei zu  $e$  parallele Gerade erblicken, wenn wir in der Richtung von  $e$  in den Raum

hineinschauen, offenbar einen Abstand gleich dem senkrechten Abstand der beiden Geraden zuschreiben. Das werde analytisch formuliert. Vorausgesetzt ist:  $(ee) = e \neq 0$ . Jede Verschiebung  $\mathfrak{x}$  kann in eindeutig bestimmter Weise in zwei Summanden gespalten werden

$$(2) \quad \mathfrak{x} = \xi e + \mathfrak{x}^*,$$

deren erster proportional, deren zweiter orthogonal zu  $e$  ist:

$$(3) \quad (\mathfrak{x}^* e) = 0, \quad \xi = \frac{1}{e} (\mathfrak{x} e).$$

Wir nennen  $\xi$  die *Höhe* der Verschiebung  $\mathfrak{x}$  (den Höhenunterschied von  $A$  und  $B$ , wenn  $\mathfrak{x} = \overrightarrow{AB}$ ). Es gilt

$$(4) \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = e\xi^2 + (\mathfrak{x}^*\mathfrak{x}^*).$$

$\mathfrak{x}$  kann vollständig charakterisiert werden durch Angabe seiner Höhe  $\xi$  und der durch  $\mathfrak{x}$  im Unterraum hervorgerufenen Verschiebung  $\mathfrak{x}^*$ ; wir schreiben

$$\mathfrak{x} = \xi | \mathfrak{x}.$$

Der Vollraum ist »zerspalten« in Höhe und Unterraum, der »Lage-Unterschied«  $\mathfrak{x}$  zweier Punkte im Vollraum in den Höhenunterschied  $\xi$  und Lagenunterschied  $\mathfrak{x}^*$  im Unterraum; nicht nur die Behauptung des Zusammenfallens zweier Punkte im Raum hat einen Sinn, sondern auch die Aussage: zwei Punkte fallen im Unterraum zusammen, bzw. befinden sich in der gleichen Höhe. Jede Verschiebung  $\mathfrak{x}$  des Unterraums wird durch eine und *nur eine* zu  $e$  orthogonale Verschiebung  $\mathfrak{x}^*$  des Vollraums hervorgerufen; die Beziehung zwischen  $\mathfrak{x}^*$  und  $\mathfrak{x}$  ist umkehrbar-eindeutig und affin. Durch die Definitionsgleichung

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}^*\mathfrak{x}^*)$$

erteilen wir dem Unterraum eine auf der quadratischen Fundamentalform  $(\mathfrak{x}\mathfrak{x})$  beruhende Metrik. Dann geht (4) über in die Pythagoreische Fundamentalgleichung

$$(5) \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = e\xi^2 + (\mathfrak{x}\mathfrak{x}),$$

die sich für zwei Verschiebungen bei einer ohne weiteres verständliche Bezeichnung zu

$$(5') \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = e\xi\eta + (\mathfrak{x}\mathfrak{y})$$

verallgemeinern läßt.

Diese Ausführungen sind hier, soweit sie den affinen Raum betreffen unmittelbar anzuwenden: der Vollraum ist die vierdimensionale Welt, ist irgendein in die Zukunft weisender Vektor, der Unterraum das, was wir gemeinhin den *Raum* nennen. Je zwei Weltpunkte, die auf einer zu  $e$  parallelen Weltgeraden liegen, fallen in den gleichen Raumpunkt. Dieser Raumpunkt kann durch die zu  $e$  parallele Gerade graphisch dargestellt werden, und er kann durch einen ruhenden Massenpunkt, d. h. einen solchen, dessen Weltlinie eben jene Gerade ist, dauernd markiert werden. — Was aber die Metrik betrifft, so ist diese nach dem Galileischen Relativitäts-

prinzip von anderer Art, als wir eben angenommen hatten; darum sind folgende Modifikationen anzubringen. Jede Weltverschiebung  $\mathfrak{x}$  hat eine bestimmte Zeitdauer  $t(\mathfrak{x}) = t$  (welche an Stelle der »Höhe« in unsern geometrischen Auseinandersetzungen tritt) und erzeugt im Unterraum eine Verschiebung  $\mathfrak{x}$ ; spaltet demnach gemäß der Unterscheidung von Zeit und Raum nach der Formel

$$\mathfrak{x} = t | \mathfrak{x}.$$

Insbesondere kann jede Raumverschiebung  $\mathfrak{x}$  durch eine und nur eine Weltverschiebung  $\mathfrak{x}^*$  hervorgerufen werden, welche der Gleichung  $t(\mathfrak{x}^*) = 0$  genügt. Durch die für solche Vektoren  $\mathfrak{x}^*$  definierte quadratische Form  $(\mathfrak{x}^* \mathfrak{x}^*)$  empfängt der Raum seine Euklidische Metrik:

$$(\mathfrak{x} \mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}^* \mathfrak{x}^*).$$

Der Raum ist abhängig von der Projektionsrichtung; in der Realität kann die Projektionsrichtung durch irgend einen in gleichförmiger Translation begriffenen Massenpunkt (oder den Schwerpunkt eines abgeschlossenen isolierten Massensystems) festgelegt werden.

Wir haben diese Dinge mit solcher pedantischen Genauigkeit auseinandergesetzt, um für das Einsteinsche Relativitätsprinzip, dem gegenüber unsre Anschauung zunächst in ganz anderm Maße als gegenüber dem Galileischen versagt, wenigstens mit einer abgeklärten, auf diesen Fall ohne weiteres übertragbaren mathematischen Begriffsbildung gewappnet zu sein.

Wir lenken zurück ins physikalische Fahrwasser. Durch die Entdeckung der *endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes* wurde der naiven Ansicht, die Dinge seien gleichzeitig mit ihrer Wahrnehmung, der Boden entzogen. Da wir kein rascheres Zeitübertragungsmittel besitzen als das Licht selber (oder die drahtlose Telegraphie), ist es natürlich unmöglich, die Lichtgeschwindigkeit durch Messung der Zeit festzustellen, welche vergeht, bis das von einer Station  $A$  ausgesandte Lichtsignal bei einer andern Station  $B$  eintrifft. Roemer (1675) erschloß sie aus der scheinbaren Unregelmäßigkeit in der Umlaufzeit der Jupitermonde, welche genau die Periode eines Jahres aufwies; denn es erschien absurd, einen Wirkungszusammenhang zwischen Erde und Jupitermond anzunehmen, der die Periode des Erdumlaufs als eine Störung von so erheblicher Größe auf die Jupitermonde überträgt. Fizeau bestätigte die Entdeckung durch irdische Messung; seine Methode beruht auf dem einfachen Gedanken, die Empfangsstation  $B$  mit der Sendestation  $A$  zusammenfallen zu lassen und den Lichtstrahl von  $A$  durch Spiegelung nach  $A$  zurückzuleiten. Nach diesen Messungen haben wir anzunehmen, daß das Licht sich um das Erregungszentrum in konzentrischen Kugeln mit einer konstanten Geschwindigkeit  $c$  ausbreitet. In unserer graphischen Darstellung würde (wiederum mit Unterdrückung einer Raumkoordinate) die Ausbreitung eines im Weltpunkt  $O$  gegebenen Lichtsignals durch den in Fig. 7 eingetragenen geraden Kreiskegel mit der Gleichung

$$(6) \quad c^2 t^2 - (x_1^2 + x_2^2) = 0$$

abgebildet werden: jede Ebene  $t = \text{konst.}$  schneidet den Kegel in dem Kreis derjenigen Punkte, bis zu denen im Momente  $t$  das Lichtsignal gelangt ist; der Gleichung (6) (mit dem Zusatz  $t > 0$ ) genügen alle und nur die Welpunkte, in denen das Lichtsignal eintrifft. Wieder entsteht die Frage, was für ein Bezugsraum dieser Beschreibung des Vorganges zugrunde liegt. Die *Aberration der Fixsterne* zeigt, daß die Erde relativ zu ihm sich so bewegt, wie es nach der Newtonschen Theorie der Fall ist, d. h. daß er mit einem zulässigen Bezugsraum im Sinne der Newtonschen Mechanik zusammenfällt. Nun ist die Ausbreitung in konzentrischen Kugeln aber gewiß nicht invariant gegenüber den Galilei-Transformationen (III); denn eine schief gezeichnete  $t'$ -Achse schneidet in unserer Figur die Ebenen  $t = \text{konst.}$  in Punkten, die exzentrisch zu den Ausbreitungskreisen liegen. Trotzdem ist dies kein Einwand gegen das Galileische Relativitätsprinzip, wenn gemäß den Vorstellungen, welche die Physik lange beherrscht haben, die Fortpflanzung des Lichtes in einem materiellen Träger geschieht, dem *Lichtäther*, dessen einzelne Teile gegeneinander bewegbar sind. Es verhält sich dann mit dem Licht genau so wie mit den konzentrischen Wellenkreisen auf einer Wasseroberfläche, die durch einen hineingeworfenen Stein erzeugt werden; aus diesem Phänomen kann gewiß nicht der Schluß gezogen werden, daß die hydrodynamischen Gleichungen dem Galileischen Relativitätsprinzip widerstreiten. Denn das Medium selber, das Wasser bzw. der Äther, dessen einzelne Teile von den verhältnismäßig kleinen Schwingungen abgesehen, gegeneinander ruhen, gibt dasjenige Bezugssystem ab, auf welches sich die Aussage der konzentrischen Ausbreitung bezieht.

Zur weiteren Diskussion dieser Frage wollen wir die Optik in denjenigen theoretischen Zusammenhang einfügen, in den sie seit Maxwell unlösbar hineingehört: die Theorie zeitlich veränderlicher elektromagnetischer Felder.

### § 19. Elektrodynamik zeitlich veränderlicher Felder. Lorentzsches Relativitätstheorem.

Der Übergang von den stationären elektromagnetischen Feldern (§ 9) zu zeitlich veränderlichen hat folgendes gelehrt:

1) Der sog. elektrische Strom besteht tatsächlich aus bewegter Elektrizität: ein geladener rotierender Draht erzeugt ein Magnetfeld nach dem Biot-Savartschen Gesetz. Ist die Ladungsdichte  $\varrho$ , die Geschwindigkeit  $v$ , so ist die Stromdichte  $\mathfrak{z}$  dieses Konvektionsstromes offenbar  $= \varrho v$ ; doch muß sie, damit das Biot-Savartsche Gesetz genau in der alten Form gültig bleibt, in einer andern Maßeinheit gemessen werden, es ist also

zu setzen  $\mathfrak{z} = \frac{\varrho v}{c}$ , wo  $c$  eine universelle Konstante von der Dimension

einer Geschwindigkeit ist. Das schon von Weber und Kohlrausch angestellte, später von Rowland und Eichenwald wiederholte Experiment ergab für  $c$  einen Wert, der innerhalb der Beobachtungsfehler mit d

Lichtgeschwindigkeit übereinstimmt<sup>2)</sup>). Man bezeichnet  $\frac{\rho}{c} = \rho'$  als das elektromagnetische Maß der Ladungsdichte und, damit auch in elektromagnetischen Maßeinheiten die elektrische Kraftdichte  $= \rho' \mathfrak{E}'$  ist,  $\mathfrak{E}' = c \mathfrak{E}$  als das elektromagnetische Maß der Feldstärke.

2) Durch ein veränderliches Magnetfeld wird in einem homogenen Draht ein Strom induziert. Er kann auf Grund des Materialgesetzes  $\mathfrak{s} = \sigma \mathfrak{E}$  und des *Faradayschen Induktionsgesetzes* bestimmt werden, welches aussagt, daß die induzierte elektromotorische Kraft gleich der zeitlichen Abnahme des durch den Leiter hindurchtretenden magnetischen Induktionsflusses ist; es gilt also

$$(7) \quad \int \mathfrak{E}' dr = - \frac{d}{dt} \int B_n d\sigma$$

(links steht das Linienintegral über eine geschlossene Kurve, rechts das Oberflächenintegral der normalen Komponente der Magnetinduktion  $\mathfrak{B}$ , erstreckt über eine in diese Kurve eingespannte Fläche). Der Induktionsfluß ist durch die Leiterkurve eindeutig bestimmt, weil

$$(8') \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

ist (es gibt keinen wahren Magnetismus). Der Stokessche Satz ergibt aus (7) das Differentialgesetz

$$(8) \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0.$$

Die im statischen Falle gültige Gleichung  $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$  erweitert sich also durch das auf der linken Seite hinzutretende, nach der Zeit differenzierte Glied  $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$ . Auf ihm beruht unsere ganze Elektrotechnik, und die Notwendigkeit seiner Einführung ist daher durch die Erfahrung auf das beste gestützt.

3) Hypothetisch war hingegen zu Maxwells Zeit dasjenige Glied, durch welches Maxwell die magnetische Grundgleichung

$$(9) \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{s}$$

erweiterte. In einem zeitlich veränderlichen Feld, etwa bei der Entladung eines Kondensators kann nicht  $\operatorname{div} \mathfrak{s} = 0$  sein, sondern es muß statt dessen die »Kontinuitätsgleichung«

$$(10) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{s} = 0$$

gelten, in der die Tatsache, daß der Strom aus bewegter Elektrizität besteht, zum Ausdruck kommt. Da  $\rho = \operatorname{div} \mathfrak{D}$  ist, wird mithin nicht  $\mathfrak{s}$ , wohl aber  $\mathfrak{s} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$  quellenfrei sein, und es liegt demnach sehr nahe, die Gleichung (9) im zeitlich veränderlichen Feld durch

$$(11) \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \mathfrak{s}$$

zu ersetzen. Daneben gilt nach wie vor

$$(11') \quad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho.$$

Aus (11) und (11') folgt jetzt umgekehrt die Kontinuitätsgleichung (11)

Auf dem nach der Zeit differentiierten Zusatzgliede  $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$  (dem Maxwellschen »Verschiebungsstrom«) beruht es, daß elektromagnetische Erregung im Äther mit der endlichen Geschwindigkeit  $c$  sich ausbreiten; es bildet also die Grundlage der elektromagnetischen Lichttheorie, welche die optischen Erscheinungen in so wunderbarer Weise hat deuten können und findet in den bekannten Hertz'schen Versuchen und der modernen drahtlosen Telegraphie eine direkte experimentelle Bestätigung (und technische Ausnutzung). Danach ist es auch klar, daß diesen Gesetzen derjenige Bezugsraum zugrunde liegt, in welchem der Satz von der konzentrischen Ausbreitung des Lichtes gültig ist, der »ruhende« Lichtäther — Zu den Maxwellschen Feldgleichungen (8) und (8'), (11) und (11') treten die Materialgesetze.

Wir wollen aber hier nur die Zustände im Äther betrachten; da

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{B},$$

und die Maxwellschen Gleichungen lauten

$$(12_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0; \\ \operatorname{rot} \mathfrak{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \mathfrak{s}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = \varrho. \end{array} \right.$$

Die atomistische Elektronentheorie betrachtet sie als die allgemein gültigen exakten Naturgesetze. Sie setzt außerdem  $\mathfrak{s} = \frac{\varrho \mathfrak{v}}{c}$ , wo  $\mathfrak{v}$  die Geschwindigkeit der Materie bedeutet, an der die elektrische Ladung haftet.

Die auf die Massen wirkende Kraft besteht aus dem vom elektrischen und vom Magnetfeld herrührenden Bestandteil; ihre Dichte ist

$$(13) \quad \mathfrak{p} = \varrho \mathfrak{E} + [\mathfrak{s} \mathfrak{B}].$$

Da  $\mathfrak{s}$  zu  $\mathfrak{v}$  parallel ist, ergibt sich für die pro Zeit- und Volumeinheit an den Elektronen geleistete Arbeit der Wert

$$\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{v} = \varrho \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{v} = c(\mathfrak{s} \mathfrak{E}) = \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{E}'.$$

Sie wird zur Erhöhung der kinetischen Energie der Elektronen verwendet, die sich durch die Zusammenstöße zum Teil auf die neutralen Moleküle überträgt. Phänomenologisch tritt diese verstärkte molekulare Bewegung im Innern des Leiters als *Joulesche Wärme* in Erscheinung. In der Elektrodynamik lehrt ja die Beobachtung, daß  $\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{E}'$  die pro Zeit- und Volumeinheit vom Strom erzeugte Wärmemenge ist; dieser Energieverbrauch muß durch die stromerzeugende Maschine gedeckt werden. Multiplizieren wir Gleichung (12<sub>1</sub>) mit  $-\mathfrak{B}$ , die Gleichung (12<sub>2</sub>) mit  $\mathfrak{E}$  und addieren wir, so kommt

$$-c \cdot \operatorname{div} [\mathfrak{E} \mathfrak{B}] - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{B}^2 \right) = c (\mathfrak{s} \mathfrak{E}).$$

Setzen wir

$$[\mathfrak{E} \mathfrak{B}] = \mathfrak{S}, \quad \frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{B}^2 = W$$

und integrieren über irgend ein Volumen  $V$ , so lautet diese Gleichung

$$-\frac{d}{dt} \int_V W dV + c \int_{\Omega} S_n d\sigma = \int_V c (\mathfrak{s} \mathfrak{E}) dV;$$

das zweite Glied links ist das über die begrenzende Oberfläche  $\Omega$  von  $V$  erstreckte Integral der nach der inneren Normale genommenen Komponente  $S_n$  von  $\mathfrak{S}$ . Auf der rechten Seite steht hier die im Volumen  $V$  pro Zeiteinheit geleistete Arbeit; sie wird kompensiert durch die Abnahme der in  $V$  enthaltenen Feldenergie  $\int W dV$  und durch die von außen dem Raumstück  $V$  zufließende Energie. Unsere Gleichung enthält also das *Energiegesetz*; durch sie bestätigt sich endgültig unser früherer Ansatz für die Dichte  $W$  der Feldenergie und ergibt sich ferner, daß  $c \mathfrak{S}$ , der sog. Poyntingsche Vektor, den *Energiestrom* darstellt.

Die Feldgleichungen (12) sind von Lorentz unter der Voraussetzung, daß die Verteilung der Ladungen und des Stromes bekannt ist, in folgender Weise integriert worden. Der Gleichung  $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$  wird durch den Ansatz

$$(14) \quad -\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{f}$$

(—  $\mathfrak{f}$  = Vektorpotential) genügt. Durch Einsetzen in die erste Gleichung ergibt sich dann, daß  $\mathfrak{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t}$  wirbelfrei ist, und also kann man setzen

$$(15) \quad \mathfrak{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} = \operatorname{grad} \varphi$$

(—  $\varphi$  das skalare Potential). Die Willkür, mit der die Bestimmung von  $\mathfrak{f}$  behaftet ist, können wir zur Erfüllung der Nebenbedingung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{f} = 0$$

ausnutzen, die sich hier als die zweckmäßige erweist (während wir im stationären Feld  $\operatorname{div} \mathfrak{f} = 0$  nahmen). Führen wir die Potentiale in die beiden letzten Gleichungen ein, so liefert eine einfache Rechnung

$$(16) \quad -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta \varphi = \varrho,$$

$$(16') \quad -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial t^2} + \Delta \mathfrak{f} = \mathfrak{s}.$$

Eine Gleichung von der Form (16) zeigt eine Wellenausbreitung mit der Geschwindigkeit  $c$  an. In der Tat: wie die Poissonsche Gleichung  $\Delta \varphi = \varrho$  die Lösung hat

$$-4\pi\varphi = \int \frac{\varrho}{r} dV,$$

so lautet die Lösung von (16):

$$-4\pi q = \int \frac{q\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} dV;$$

hier steht auf der linken Seite der Wert von  $q$  in einem Punkte  $O$  zur Zeit  $t$ ;  $r$  ist die Entfernung des Quellpunktes  $P$ , über den integriert wird, vom Aufpunkt  $O$ , und unter dem Integral tritt der Wert von  $q$  im Punkte  $P$  zur Zeit  $t - \frac{r}{c}$  auf. Ebenso ist die Lösung von (16')

$$-4\pi f = \int \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} dV.$$

Das Feld in einem Punkte hängt also nicht ab von der Ladungs- und Stromverteilung im gleichen Moment, sondern maßgebend ist für jede Stelle der Augenblick, der um so viel  $\left(\frac{r}{c}\right)$  zurückliegt, als die mit der Geschwindigkeit  $c$  sich ausbreitende Wirkung gebraucht, um vom Quellpunkt bis zum Aufpunkt zu gelangen.

Wie der Potentialausdruck (in Cartesischen Koordinaten)

$$\Delta q = \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial x_3^2}$$

invariant ist gegenüber linearen Transformationen der Variablen  $x_1, x_2, x_3$ , welche die quadratische Form

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

in sich überführen, so ist der beim Übergang vom statischen zu einem zeitlich veränderlichen Feld an seine Stelle tretende Ausdruck

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial x_3^2}$$

invariant gegenüber solchen linearen Transformationen der vier Koordinaten  $t, x_1, x_2, x_3$ , den sog. Lorentz-Transformationen, welche die indefinite Form

$$(17) \quad -c^2 t^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

in sich überführen. Lorentz erkannte, daß nicht nur die Gleichung (16), sondern das ganze System der elektromagnetischen Gesetze für den Äther diese Invarianzeigenschaft besitzt, daß sie sich nämlich ausdrücken durch invariante Relationen zwischen Tensoren in einem vierdimensionalen affinen Raum mit den Koordinaten  $t, x_1, x_2, x_3$ , in den durch die Form (17) eine (indefinite) Metrik eingetragen ist: Lorentzsches Relativitätstheorem.

Zum Beweise ändern wir die Maßeinheit der Zeit, indem wir setzen  $ct = x_0$ . Die Koeffizienten der metrischen Fundamentalform sind dann

$$g_{ik} = 0 \quad (i \neq k); \quad g_{ii} = \varepsilon_i,$$

wo  $\varepsilon_0 = -1$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1$  ist. Beim Übergang von den in bezug auf einen Index  $i$  kovarianten zu den kontravarianten Komponenten eines Tensors ist die  $i$ te Komponente also lediglich mit dem Vorzeichen  $\varepsilon_i$  zu multiplizieren. Die Kontinuitätsgleichung der Elektrizität (10) gewinnt die gewünschte invariante Form

$$\sum_{i=0}^3 \frac{\partial s^i}{\partial x_i} = 0,$$

wenn wir

$$s^0 = \varrho; \quad s^1, s^2, s^3 \text{ gleich den Komponenten von } \mathfrak{s}$$

als die vier kontravarianten Komponenten eines Vektors in jenem vierdimensionalen Raum einführen, des »Viererstroms«. Parallel damit — vgl. (16), (16') — müssen wir

$$\varphi^0 = \varphi \text{ und die Komponenten von } \mathfrak{f}: \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$$

zu den kontravarianten Komponenten eines vierdimensionalen Vektors vereinigen, den wir als elektromagnetisches Potential bezeichnen; von seinen kovarianten Komponenten ist die 0te  $\varphi_0 = -\varphi$ , die drei andern  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  sind gleich den Komponenten von  $\mathfrak{f}$ . Dann lassen sich die Gleichungen (14), (15), durch welche die Feldgrößen  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{E}$  aus den Potentialen entspringen, in der invarianten Form schreiben

$$(18) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = F_{ik},$$

wo

$$\mathfrak{E} = (F_{10}, F_{20}, F_{30}), \quad \mathfrak{B} = (F_{23}, F_{31}, F_{12})$$

gesetzt ist. In dieser Weise hat man also elektrische und magnetische Feldstärke zu einem einzigen Flächentensor 1. Stufe  $F$ , dem »Felde«, zusammenzufassen. Aus (18) ergeben sich die invarianten Gleichungen

$$(19) \quad \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0,$$

und dies ist das erste System der Maxwellschen Gleichungen (12<sub>1</sub>). Den Umweg über die Lorentzsche Lösung mit Hilfe der Potentiale haben wir lediglich eingeschlagen, um naturgemäß auf die richtige Art der Zusammenfassung der dreidimensionalen Größen zu vierdimensionalen Vektoren und Tensoren geführt zu werden. Bei Übergang zu kontravarianten Komponenten ist

$$\mathfrak{E} = (F^{01}, F^{02}, F^{03}), \quad \mathfrak{B} = (F^{23}, F^{31}, F^{12}).$$

Das zweite System der Maxwellschen Gleichungen lautet jetzt in invarianter vierdimensionaler Tensorschreibweise:

$$(20) \quad \sum_k \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = s^i.$$

Führen wir den vierdimensionalen Vektor mit den kovarianten Komponenten

$$(21) \quad p_i = F_{ik} s^k$$

(und den kontravarianten

$$p^i = F^{ik} s_k)$$

ein — nach früherem Brauch lassen wir die Summenzeichen wieder fort — so ist  $p^0$  die »Leistungsdichte«, die Arbeit pro Zeit- und Volumeinheit:  $p^0 = (\mathfrak{E})$  [die Zeiteinheit ist hier dem neuen Zeitmaß  $x_0 = ct$  anzupassen], und  $p^1, p^2, p^3$  sind die Komponenten der Kraftdichte.

Damit ist das Lorentzsche Relativitätstheorem vollständig bewiesen. *Zugleich aber bemerken wir, daß die erhaltenen Gesetze genau so lauten wie die Gesetze des stationären Magnetfeldes* [§ 9, (72)], *nur vom dreidimensionalen auf den vierdimensionalen Raum übertragen.* Es ist kein Zweifel, daß in der vierdimensionalen Tensorformulierung ihre wahre mathematische Harmonie, die nicht vollkommener sein könnte, zutage tritt.

Daraus ergibt sich noch weiter, daß wir genau wie im dreidimensionalen Fall die »Viererkraft«  $p_i$  aus einem vierdimensionalen symmetrischen »Spannungstensor«  $S$  herleiten können:

$$(22) \quad -p_i = \frac{\partial S_i^k}{\partial x_k} \quad \text{oder} \quad -p^i = \frac{\partial S^{ik}}{\partial x_k};$$

$$(22') \quad S_i^k = F_{ir} F^{kr} - \frac{1}{2} \delta_i^k |F|^2.$$

Das (hier nicht notwendig positive) Quadrat des Feldbetrages ist

$$|F|^2 = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}.$$

Wir wollen die Formel (22) durch direktes Ausrechnen bestätigen. Es ist

$$\frac{\partial S_i^k}{\partial x_k} = F_{ir} \frac{\partial F^{kr}}{\partial x_k} + F^{kr} \frac{\partial F_{ir}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} F^{kr} \frac{\partial F_{kr}}{\partial x_i}.$$

Der erste Term rechts ergibt

$$-F_{ir} s^r = -p_i;$$

der zweite wird, wenn man den Faktor von  $F^{kr}$  gleichfalls schiefsymmetrisch schreibt,

$$= \frac{1}{2} F^{kr} \left( \frac{\partial F_{ir}}{\partial x_k} - \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_r} \right)$$

und liefert mit dem dritten vereinigt

$$- \frac{1}{2} F^{kr} \left( \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_r} + \frac{\partial F_{kr}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ri}}{\partial x_k} \right);$$

der dreiteilige Ausdruck in der Klammer ist nach (19) = 0.

$|F|^2$  ist =  $\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{E}^2$ . Sehen wir zu, was die einzelnen Komponenten von  $S^{ik}$  bedeuten, indem wir gemäß der Scheidung in Zeit und Raum den Index 0 von den übrigen 1, 2, 3 trennen.

$S^{00}$  ist = der Energiedichte  $W = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{B}^2)$ ,

$S^{0i}$  = den Komponenten von  $\mathfrak{S} = [\mathfrak{E}\mathfrak{B}]$ ,  $(i, k = 1, 2, 3)$

$S^{ik}$  = den Komponenten des Maxwellischen Spannungstensors,

der sich aus dem in § 9 angegebenen elektrischen und magnetischen Bestandteil zusammensetzt. Die 0<sup>te</sup> der Gleichungen (22) enthält demnach das Energiegesetz. Die 1., 2., 3. haben eine völlig analoge Gestalt.

Bezeichnen wir einen Augenblick die Komponenten des Vektors  $\frac{1}{c} \mathfrak{E}$  mit  $G^1, G^2, G^3$  und verstehen unter  $t^{(i)}$  den Vektor mit den Komponenten

$$S^{i1}, S^{i2}, S^{i3},$$

so haben wir

$$(23) \quad -p^i = \frac{\partial G^i}{\partial t} + \text{div } t^{(i)}. \quad (i = 1, 2, 3)$$

Die Kraft, welche auf die in einem Raumgebiet  $V$  enthaltenen Elektronen wirkt, erzeugt eine ihr gleiche zeitliche Zunahme des Bewegungsimpulses derselben. Diese Zunahme wird nach (23) ausgeglichen durch eine entsprechende Abnahme des im Felde mit der Dichte  $\frac{\mathfrak{E}}{c}$  verteilten *Feld-*

*impulses* und den Zustrom des Feldimpulses von außen. Der Strom der  $i^{\text{ten}}$  Impulskomponente ist gegeben durch  $t^{(i)}$ , der *Impulsstrom* selber ist demnach nichts anderes als der Maxwellsche Spannungstensor. *Der Satz von der Erhaltung der Energie ist nur die eine, die Zeitkomponente eines gegenüber Lorentztransformationen invarianten Gesetzes, dessen Raumkomponenten die Erhaltung des Impulses aussagen.* Die gesamte Energie sowohl als der gesamte Impuls bleiben ungeändert; sie strömen nur im Felde hin und her und verwandeln sich aus Feldenergie und Feldimpuls in kinetische Energie und kinetischen Impuls der Materie et vice versa. Das ist die einfache anschauliche Bedeutung der Formeln (22). Ihr gemäß werden wir in Zukunft von dem Tensor  $S$  der vierdimensionalen Welt als dem *Energie-Impuls-Tensor* oder kurz *Energietensor* sprechen. Aus

der Symmetrie desselben hat sich ergeben, daß die *Impulsdichte*  $= \frac{1}{c^2}$  mal dem *Energiestrom* ist; der Feldimpuls ist daher sehr schwach, er konnte aber als Druck des Lichtes auf eine spiegelnde Fläche nachgewiesen werden. —

Eine Lorentztransformation ist linear, sie kommt daher (wenn wir in unserer graphischen Darstellung wiederum eine Raumkoordinate unterdrücken) auf die Einführung eines andern affinen Koordinatensystems hinaus. Überlegen wir uns, wie die Grundvektoren  $e'_0, e'_1, e'_2$  des neuen Koordinatensystems liegen zu denen des alten  $e_0, e_1, e_2$ , d. i. zu den Einheitsvektoren in Richtung der  $x_0$  (oder  $t$ ),  $x_1$ ,  $x_2$  Achse! Da für

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 = x'_0 e'_0 + x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2: \\ -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 &= -x'^0{}^2 + x'^1{}^2 + x'^2{}^2 [= Q(\mathfrak{x})] \end{aligned}$$

sein soll, ist  $Q(e'_0) = -1$ . Der von  $O$  aus aufgetragene Vektor  $e'_0$  oder die  $t'$ -Achse liegt demnach im Innern des Kegels der Lichtausbreitung, die Parallelebenen  $t' = \text{konst.}$  liegen so, daß sie aus dem Kegel Ellipsen

ausschneiden, deren Mittelpunkte auf der  $t'$ -Achse liegen (s. Fig. 7), die  $x'_1, x'_2$  Achse haben die Richtung konjugierter Durchmesser dieser Schnittellipsen, so daß die Gleichung jeder von ihnen

$$x'^2_1 + x'^2_2 = \text{konst.}$$

lautet.

Solange man an der Vorstellung des materiellen, schwingungsfähigen Äthers festhält, kann man in dem Lorentzschen Relativitätstheorem nur eine merkwürdige mathematische Transformationseigenschaft der Maxwell'schen Gleichungen erblicken; das wahrhaft gültige Relativitätstheorem bleibt das Galilei-Newtonsche. Es entsteht aber die Aufgabe, nicht nur die optischen Erscheinungen, sondern die gesamte Elektrodynamik und ihre Gesetze als die Konsequenz einer dem Galileischen Relativitätsprinzip genügenden Äthermechanik zu deuten, indem man die Feldgrößen mit einem bestimmten Zusammenhang mit Dichte und Geschwindigkeit des Äthers bringt. Vor Maxwells elektromagnetischer Lichttheorie hat man diese Aufgabe bekanntlich für die optischen Erscheinungen mit teilweisem, aber niemals endgültigem Erfolg zu lösen versucht; für das umfassende Gebiet, in das nach Maxwell die optischen Erscheinungen eingeordnet sind, hat man diesen Versuch nicht mehr unternommen<sup>3)</sup>. Vielmehr begann sich die Vorstellung des im leeren Raume existierenden Feldes, das keines Trägers bedarf, allmählich durchzusetzen; ja schon Faraday hat in klaren Worten die Auffassung ausgesprochen, daß sich nicht das Feld auf die Materie stützen müsse, sondern umgekehrt die Materie nicht anderes sei als Stellen des Feldes von besonderem singulären Charakter.

## § 20. Das Einsteinsche Relativitätsprinzip.

Halten wir zunächst noch an der Äthervorstellung fest! Es muß möglich sein, die Bewegung eines Körpers, z. B. der Erde, relativ zum ruhenden Äther zu konstatieren. Die Aberration leistet das nicht; durch sie wird vielmehr nur dargetan, daß jene relative Bewegung im Laufe des Jahres wechselt. Es seien  $A_1 O A_2$  drei feste Punkte der Erde, welche ihre Bewegung mitmachen; sie mögen in gerader Linie, und zwar in der Bewegungsrichtung der Erde, in gleichem Abstand  $A_1 O = O A_2 = l$  aneinanderfolgen, und  $v$  sei die Translationsgeschwindigkeit der Erde durch den Äther;  $\frac{v}{c} = q$  ist (voraussichtlich) sehr klein. Ein in  $O$  aufgegebenes Lichtsignal wird in  $A_2$  nach Ablauf der Zeit  $\frac{l}{c - v}$ , in  $A_1$  nach Ablauf der Zeit  $\frac{l}{c + v}$  eintreffen. Leider kann man diesen Unterschied nicht konstatieren, weil man über kein rascheres Signal als das Licht selbst verfügt, um nach einem andern Orte die Zeit zu übermitteln. Wir helfen uns durch den Fizeauschen Gedanken: wir bringen in  $A_1$  und  $A_2$  einen kleinen Spiegel an, der den Lichtstrahl nach  $O$  reflektiert. W

$$\frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2}$$
$$\frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2}.$$

Fig. 8.

folglich sind die beiden Winkel bei  $A'$  einander gleich: der reflektierende Spiegel muß, wie im Falle der Ruhe, senkrecht zu der starren Verbindung  $OA$  gestellt werden, damit der Lichtstrahl nach  $O$  zurückkommt. Eine elementare trigonometrische Rechnung liefert für die *scheinbare Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Richtung  $S$* :

A diagram of a Michelson interferometer. A light source (Lichtquelle) at the bottom emits a beam that is split by a beam splitter (diagonal line). One path goes to a mirror (A) on the right, and the other goes to a mirror (A\*) at the top. The beams recombine and are directed towards an observer (Beobachter) on the left. Distances  $l$  and  $l^*$  are marked along the paths.

Fig. 9.

Die Ausführung dieser Beobachtung ist der berühmte *Michelsonsche Versuch* <sup>4)</sup>. Es werden zwei mit  $O$  starr verbundene Spiegel  $A$ ,  $A^*$  in den Entfernungen  $l$ ,  $l^*$  angebracht, der eine in der Bewegungsrichtung, der andere senkrecht zu ihr. Die ganze Montierung ist um  $O$  drehbar. Mittels einer halbdurchlässig versilberten, den rechten Winkel bei  $O$  halbierenden Glasplatte wird in  $O$  ein Lichtstrahl in zwei gespalten, deren einer auf  $A$ , deren anderer auf  $A^*$  zuläuft; dort werden sie reflektiert und bei ihrer Ankunft in  $O$  mittels jener halbversilberten Glasplatte wieder in eine einzige Strahlenrichtung vereinigt. Es tritt Interferenz ein

( $l$  und  $l^*$  sind nahezu einander gleich) wegen der aus (24) sich ergebenden Wegdifferenz

$$\frac{2l}{1-q^2} - \frac{2l^*}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Dreht man jetzt das Gerüst langsam um  $90^\circ$ , bis  $A^*$  in die Bewegungsrichtung fällt, so geht diese Wegdifferenz stetig über in

$$\frac{2l}{\sqrt{1-q^2}} - \frac{2l^*}{1-q^2};$$

es tritt demnach eine Verminderung um

$$2(l+l^*)\left(\frac{1}{1-q^2} - \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}\right) \sim (l+l^*)q^2$$

ein. Damit muß eine Verschiebung der Interferenzstreifen verbunden sein. *Obwohl die numerischen Verhältnisse so liegen, daß noch 1% der zu erwartenden Verschiebung im Michelsonschen Interferometer wahrgenommen werden müßte, zeigte sich bei Ausführung des Experiments keine Spur davon.*

Dieses seltsame Ergebnis suchte Lorentz durch die kühne Hypothese zu erklären, daß ein starrer Körper durch seine Bewegung relativ zum Äther in der Bewegungsrichtung eine Kontraktion im Verhältnis  $1:\sqrt{1-q^2}$  erfährt. In der Tat würde dies den negativen Ausfall des Michelsonschen Experiments erklären. Denn dann hat in der ersten Lage  $OA$  in Wahrheit die Länge  $l\sqrt{1-q^2}$ ,  $OA^*$  die Länge  $l^*$ ; in der zweiten Lage aber  $OA$  die Länge  $l$ , hingegen  $OA^*$  die Länge  $l^*\sqrt{1-q^2}$ , und der Gangunterschied ergäbe sich in beiden Fällen  $= \frac{2(l-l^*)}{\sqrt{1-q^2}}$ . Auch e

hielte man bei Drehung eines starr mit  $O$  verbundenen Spiegels in allen Richtungen die gleiche scheinbare Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $\sqrt{c^2 - v^2}$  und keine Abhängigkeit von der Richtung wie nach (24). Immerhin erschien es theoretisch noch möglich, an der gegenüber  $c$  verminderten scheinbaren Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $\sqrt{c^2 - v^2}$  die Bewegung zu konstatieren; aber wenn der Äther die Maßstäbe in der Bewegungsrichtung im Verhältnis  $1:\sqrt{1-q^2}$  zusammendrückt, so braucht er den Gang der Uhren nur noch im gleichen Verhältnis zu verlangsamen, um auch diesen Effekt zu zerstören. *Tatsächlich hat nicht nur der Michelsonsche sondern haben eine ganze Zahl weiterer Versuche, einen Einfluß der Erdbewegung auf kombinierte mechanisch-elektromagnetische Vorgänge festzustellen, ein negatives Ergebnis gehabt<sup>5)</sup>.* Es wäre also die Aufgabe der Äthermechanik, nicht nur die Maxwell'schen Gesetze zu erklären, sondern auch diese merkwürdige Wirkung auf die Materie, die so erfolgt, als hätte der Äther sich ein für allemal vorgenommen: Ihr verflixten Physiker, mich sollt ihr nicht kriegern!

Die einzig vernünftige Antwort aber auf die Frage: Wie kommt es, daß eine Translation im Äther sich nicht von Ruhe unterscheiden läßt?

war die, welche Einstein gab: *weil er nicht existiert!* (Der Äther ist immer eine vage Hypothese geblieben, und noch dazu eine, die sich so schlecht als möglich bewährt hat.) Dann aber liegt die Sache so: für die Mechanik hat sich das Galileische, für die Elektrodynamik das Lorentzsche Relativitätstheorem ergeben. Hat es damit wirklich seine Richtigkeit, so heben sie sich gegenseitig auf und bestimmen einen absoluten Bezugsraum, in welchem die mechanischen Gesetze die Newtonsche, die elektrodynamischen die Maxwellsche Form haben. Die Schwierigkeit, den negativen Ausfall aller Experimente zu erklären, die darauf aus sind, Translation von Ruhe zu unterscheiden, wird nur dann überwunden, wenn man für die gesamten Naturerscheinungen eines dieser beiden Relativitätsprinzipie als gültig ansieht. Das Galileische kommt für die Elektrodynamik nicht in Frage; es würde fordern, daß in der Maxwellschen Theorie die Glieder nicht auftreten, durch welche sich die zeitlich veränderlichen Felder von den stationären unterscheiden: es gäbe keine Induktion, es gäbe kein Licht und keine drahtlose Telegraphie. Hingegen läßt die Lorentzsche Kontraktionshypothese schon vermuten, die Newtonsche Mechanik lasse sich derart modifizieren, daß sie dem Lorentzschen Relativitätstheorem genügt, die dabei auftretenden Abweichungen aber nur von der Größenordnung  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$  werden; dann liegen sie für alle irdischen und planetarischen Geschwindigkeiten  $v$  weit unter der Grenze der Beobachtungsmöglichkeit. Das ist die Lösung Einsteins<sup>6)</sup>, welche mit einem Schlage alle Schwierigkeiten behob: *die Welt ist ein vierdimensionaler affiner Raum, dem durch eine indefinite quadratische Form*

$$Q(x) = (xx)$$

von einer negativen und drei positiven Dimensionen eine Maßbestimmung aufgeprägt ist. Alle physikalischen Größen sind Skalare und Tensoren dieser vierdimensionalen Welt, alle Naturgesetze invariante Relationen zwischen diesen. Die einfache konkrete Bedeutung der Form  $Q(x)$  ist die, daß ein in dem Weltpunkt  $O$  abgeschicktes Lichtsignal in allen und nur den Weltpunkten  $A$  ankommt, für welche  $x = \overrightarrow{OA}$  dem einen der beiden durch die Gleichung  $Q(x) = 0$  definierten Kegelmäntel (vgl. § 4) angehört. Dadurch ist der »in die Zukunft geöffnete« der beiden Kegel  $Q(x) \leq 0$  vor dem in die Vergangenheit geöffneten in objektiver Weise ausgezeichnet. Wir können  $Q(x)$  durch Einführung eines geeigneten »normalen« Koordinatensystems, bestehend aus dem Nullpunkt  $O$  und den Grundvektoren  $e_i$  auf die Normalform bringen

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA}) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

( $x_i$  die Koordinaten von  $A$ ); dabei soll noch der Grundvektor  $e_0$  dem in die Zukunft geöffneten Kegel angehören. Unter diesen normalen Koordinatensystemen läßt sich in objektiver Weise keine engere Auswahl treffen, sie sind alle gleichberechtigt. Legen wir irgend eines von ihnen zu

Grunde, so ist  $x_0$  als die Zeit, sind  $x_1, x_2, x_3$  als Cartesische Raumkoordinaten anzusprechen, und alle auf Raum und Zeit sich beziehenden geläufigen Ausdrücke sind in diesem Bezugssystem wie sonst zu verwenden.

Der negative Ausfall des Michelsonschen Versuches ist jetzt klar. Denn wenn die Wirkungsweise der Kohäsionskräfte der Materie wie die Ausbreitung des Lichtes dem Einsteinschen Relativitätsprinzip gemäß erfolgt, so müssen die Maßstäbe so funktionieren, daß objektive Feststellungen keinen Unterschied zwischen Ruhe und Translation ergeben können. Nachdem die Maxwellschen Gleichungen, wie schon Lorentz erkannte, dem Einsteinschen Relativitätsprinzip genügen, ist *der Michelsonsche Versuch geradezu ein Beweis dafür, daß die Mechanik der starren Körper in Streits mit nicht dem Galileischen, sondern dem Einsteinschen Relativitätsprinzip gemäß sein muß.*

Mathematisch ist dieses ersichtlich von viel größerer Einfachheit und Durchsichtigkeit als jenes<sup>7)</sup>; die Weltgeometrie ist durch Einstein-Minkowski der Euklidischen Raumgeometrie viel näher gerückt worden. Übrigens kommt, wie man leicht zeigen kann, die Galileische dadrin als Grenzfall der Einsteinschen Weltgeometrie heraus, daß man  $c$  gegen  $\infty$  konvergieren läßt. In anschaulicher Hinsicht aber *mutet es uns an, den Glauben an die objektive Bedeutung der Gleichzeitigkeit abzulegen, der Befreiung von diesem Dogma liegt die große erkenntnistheoretische Aufgabe Einsteins*, die seinen Namen neben den des Kopernikus rückt. Die Schluß des vorigen Paragraphen gegebene graphische Darstellung zeigt ohne weiteres, daß die Ebenen  $x'_0 = \text{konst.}$  nicht mehr mit den Ebenen  $x_0 = \text{konst.}$  zusammenfallen. Jede Ebene  $x'_0 = \text{konst.}$  trägt zufolge der in der Welt herrschenden, auf  $Q(x)$  beruhenden Metrik ihrerseits eine solche Maßbestimmung, daß die Ellipse, in der sie den »Licht-Kreis« schneidet, ein Kreis ist, und in ihr gilt die Euklidische Geometrie. Der Durchstoßpunkt mit der  $x'_0$ -Achse ist der Mittelpunkt der Schnittellipse. So wird auch im gestrichenen Bezugssystem der Vorgang der Lichtausbreitung zu einem in konzentrischen Kreisen sich vollziehenden.

Suchen wir zunächst die Schwierigkeiten zu beheben, die für unsere Anschauung, unser inneres Erleben von Raum und Zeit in dem von Einstein herbeigeführten Umsturz des Zeitbegriffs zu liegen scheinen! Nach der gewöhnlichen Auffassung ist es so: Schieße ich von einem Punkte aus in allen Richtungen, mit allen möglichen Geschwindigkeiten Kugeln ab, so erreichen sie alle Weltpunkte, die später als  $O$  sind; in die Vergangenheit aber kann ich nicht schießen. Ebenso ist ein in  $O$  stattfindendes Ereignis nur auf das, was in späteren Weltpunkten geschehen von Einfluß, während an der Vergangenheit »nichts mehr geändert werden kann«; die äußerste Grenze erreicht die Gravitation nach dem Newtonschen Attraktionsgesetz, nach dem das Ausstrecken meines Armes z. B. im selben Moment bereits seine Wirkung auf die Planetenbahn beginnt, deren Verlauf ein wenig modifizierend. Unterdrücken wir wieder eine Raumkoordinate und benutzen die graphische Darstellung, so

ruht also die absolute Bedeutung der durch  $O$  laufenden Ebene  $t = 0$  darauf, daß sie die »zukünftigen« Weltpunkte scheidet, welche von  $O$  Wirkung empfangen können, und die »vergangenen«, von denen aus eine Wirkung nach  $O$  gelangen kann. Nach dem Einsteinschen Relativitätsprinzip tritt an die Stelle der trennenden Ebene  $t = 0$  der Lichtkegel

$$x_1^2 + x_2^2 - c^2 t^2 = 0$$

(der im Grenzfall  $c = \infty$  jene doppelt überdeckte Ebene ergeben würde). Danach ist es klar, wie die Dinge jetzt liegen: Die Richtung aller in  $O$  geschleuderten Körper muß in den vorderen, der Zukunft geöffneten Kegel hineinweisen (so auch die Richtung der Weltlinie meines eigenen Leibes, meiner »Lebenslinie«, wenn ich mich in  $O$  befinde); nur auf die Ereignisse in solchen Weltpunkten, die im Innern dieses vorderen Kegels liegen, kann das, was in  $O$  geschieht, von Einfluß sein; die Grenze wird von der durch den leeren Raum erfolgenden Ausbreitung des Lichtes gegeben\*).

Befinde ich mich in  $O$ , so teilt  $O$  meine Lebenslinie in Vergangenheit und Zukunft; daran ist nichts geändert. Was aber mein Verhältnis zur Welt betrifft, so liegen in dem vorderen Kegel alle diejenigen Weltpunkte, auf welche mein Tun und Lassen in  $O$  von Einfluß ist, außerhalb desselben alle die Ereignisse, die abgeschlossen hinter mir liegen, an denen »jetzt nichts mehr zu ändern ist«: *der Mantel des vorderen Kegels trennt meine aktive Zukunft von meiner aktiven Vergangenheit.*

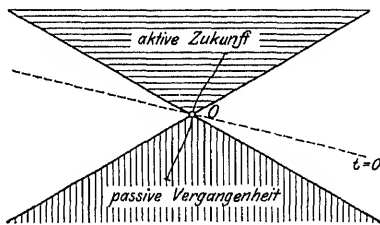


Fig. 10.

Hingegen sind im Innern des hinteren Kegels alle die Ereignisse lokalisiert, die ich entweder leibhaftig miterlebt (mitangesehen) habe, oder von denen mir irgend eine Kunde gekommen sein kann, nur diese Ereignisse haben möglicherweise Einfluß auf mich gehabt; außerhalb desselben aber liegt alles, was ich noch miterleben werde oder doch miterleben würde, wenn meine Lebensdauer unbegrenzt wäre und mein Blick überall hindringen könnte: *der Mantel des hinteren Kegels scheidet meine passive Vergangenheit von meiner passiven Zukunft.* Auf dem Mantel liegt das, was ich augenblicklich sehe oder sehen könnte; er ist also eigentlich das Bild meiner räumlichen Umwelt. Daß man in diesem Sinne zwischen *aktiver* und *passiver* Vergangenheit und Zukunft unterscheiden muß, darin liegt die erst durch das Einsteinsche Relativitätsprinzip zum Ausdruck gekommene grundsätzliche Bedeutung der Römerschen

\*) Auch die durch den leeren Raum erfolgende Ausbreitung der Gravitation muß natürlich nach der Einsteinschen Relativitätstheorie mit Lichtgeschwindigkeit erfolgen: das Gesetz für das Gravitationspotential muß sich in analoger Weise modifizieren wie dasjenige für das elektrostatische beim Übergang von statischen zu zeitlich veränderlichen Feldern.

Entdeckung der endlichen Lichtgeschwindigkeit. Die durch  $O$  hindurchführende Ebene  $t = 0$  in einem zulässigen Bezugssystem kann irgendwo so gelegt werden, daß sie den Lichtkegel  $Q(x) = 0$  nur in  $O$  schneidet und somit den Kegel der aktiven Zukunft von dem Kegel der passiven Vergangenheit trennt.

Zu einem Körper, der sich in gleichförmiger Translation befindet, kann immer ein solches zulässiges Bezugssystem (= normales Koordinatensystem) eingeführt werden, in welchem er ruht. In diesem Bezugssystem besitzen dann die einzelnen Stellen des Körpers bestimmte Entfernungen; ihre geradlinigen Verbindungslinien bilden gewisse Winkel miteinander usw., die alle nach den Formeln der gewöhnlichen analytischen Geometrie aus den Raumkoordinaten  $x_1, x_2, x_3$  der betr. Punkte in dem jetzt zugrunde gelegten Bezugssystem zu berechnen sind. Ich will sie die *Ruhmaße* des Körpers nennen (insbesondere ist danach klar, was die Ruhlänge eines Maßstabes ist). Ist jener Körper eine Uhr, in welcher sich ein periodischer Vorgang abspielt, so kommt dieser Periode in dem Bezugssystem, welchem die Uhr ruht, eine durch den Zuwachs der Koordinate  $x_0$  während einer Periode bestimmte Zeitdauer zu, die »*Eigenzeit*« der Uhr. — Stoß wir den ruhenden Körper in einem und demselben Augenblick an verschiedenen Stellen an, so werden sich diese Stellen in Bewegung setzen; aber da die Wirkung sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten kann, wird die Bewegung erst allmählich den ganzen übrigen Körper mitleidenschaftlich ziehen. Solange die um die einzelnen Stoßpunkte mit Lichtgeschwindigkeit sich ausbreitenden Kugeln sich noch nicht überdecken, bewegen sich die mitgerissenen Umgebungen der Stoßpunkte vollständig unabhängig voneinander. Daraus geht hervor, daß es starre Körper im alten Sinne gemäß der Relativitätstheorie nicht geben kann; d. h. es gibt keinen Körper, der bei allen Einwirkungen, denen man ihn aussetzt, objektiv immer derselbe bleibt. Wie können wir aber trotzdem unsere Maßstäbe zur Raummessung verwenden? Ich gebrauche ein Bild. Erhitzen wir ein im Gleichgewicht befindliches, in ein Gefäß eingeschlossenes Gas an verschiedenen Stellen gleichzeitig durch Stichflammen und isolieren es dann adiabatisch, so wird es zunächst eine Folge komplizierter Zustände durchlaufen, die den Gleichgewichtssätzen der Thermodynamik nicht genügen. Schließlich aber wird es zur Ruhe kommen in einem neuen Gleichgewichtszustand, der seiner jetzigen, durch die Wärmerhöhung erhöhten Energie entspricht. Von einem zur Messung brauchbaren starren Körper (insbesondere einem linealen Maßstab) verlangen wir, daß er immer wieder, wenn er in einem zulässigen Bezugssystem zur Ruhe gekommen ist, der gleiche ist, der er vorher war, d. h. die gleiche *Ruhmaße* (Ruhlänge) besitzt; von einer richtig gehenden Uhr, daß sie immer wieder, wenn sie in einem zulässigen Bezugssystem zur Ruhe gekommen ist, dieselbe *Eigenzeit* hat. Wir dürfen annehmen, daß die Maßstäbe und Uhren, welche wir verwenden, mit hinreichender Annäherung dieser Forderung genügen. Nur wenn wir (in dem angezogenen Vergleich)

das Gas hinreichend langsam, streng genommen: unendlich langsam erwärmen, wird es eine Folge thermodynamischer Gleichgewichtszustände durchlaufen; nur wenn wir die Maßstäbe und Uhren nicht zu stürmisch bewegen, werden sie in jedem Augenblick ihre Ruhlänge und Eigenzeit bewahren. Freilich sind die Beschleunigungsgrenzen, innerhalb deren diese Annahme ohne merklichen Fehler gemacht werden darf, sehr weit gesteckt. Endgültiges und Exaktes darüber kann aber erst eine auf den physikalischen und mechanischen Gesetzen beruhende durchgeführte *Dynamik* ergeben.

Um die Lorentz-Kontraktion vom Standpunkt der Einsteinschen Relativitätstheorie anschaulich zu verstehen, denken wir uns folgenden ebenen Vorgang. In einem tauglichen Bezugssystem (Koordinaten  $t, x_1, x_2$  unter Unterdrückung einer Raumkoordinate), auf das sich die im folgenden gebrauchten Raum-Zeit-Ausdrücke beziehen, ruhe ein ebenes Papierblatt (mit den rechtwinkligen Koordinaten  $x_1, x_2$ ), auf das eine geschlossene Kurve  $\mathcal{C}$  gezeichnet ist. Außerdem habe man eine kreisförmige Platte, die einen um den Mittelpunkt drehbaren starren Zeiger trägt; dreht man diesen langsam herum, so beschreibe die Zeigerspitze den Rand der Platte: so erweist sich, daß sie in der Tat ein Kreis ist. Die Platte bewege sich nun auf dem Papierblatt in gleichförmiger Translation; rotiert währenddes der Zeiger langsam, so wird seine Spitze beständig den Rand der Platte durchlaufen: in diesem Sinne ist sie auch in der Translation eine Kreisscheibe. In einem bestimmten Moment falle der Rand der Scheibe genau mit der Kurve  $\mathcal{C}$  zusammen. Messen wir  $\mathcal{C}$  mittels ruhender Maßstäbe aus, so finden wir, daß  $\mathcal{C}$  kein Kreis, sondern eine Ellipse ist. Der Vorgang ist in der Figur graphisch dargestellt. Es ist dasjenige Bezugssystem  $t'x'_1x'_2$  hinzugefügt, in welchem die Scheibe ruht. Der Schnitt einer Ebene  $t' = \text{konst.}$  mit dem Lichtkegel ist in diesem Bezugssystem ein »augenblicklich vorhandener Kreis«; der über ihm in Richtung der  $t'$ -Achse errichtete Zylinder stellt einen im gestrichenen System ruhenden Kreis dar, grenzt demnach das Weltgebiet ab, das von unserer Kreisscheibe bestrichen wird. Der Schnitt dieses Zylinders mit der Ebene  $t = 0$  ist in der Figur kein Kreis, sondern eine Ellipse; der über ihr in Richtung der  $t$ -Achse errichtete gerade Zylinder ist die dauernd vorhandene, auf dem Papierblatt gezeichnete Kurve.

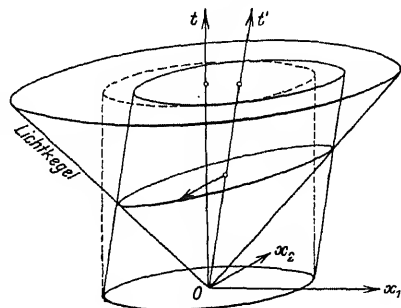


Fig. 11.

Da das Verhalten der Maßstäbe und Uhren vor Aufstellung der physikalischen Gesetze einigermaßen problematisch bleibt, ist theoretisch die Bemerkung von Interesse, daß wir zur Festlegung der Raum-Zeit-Koordi-

naten in einem zulässigen Bezugssystem prinzipiell mit viel einfacheren Meßinstrumenten ausreichen, die wir von vornherein vollständig beherrschen, nämlich mit Lichtsignalen und kräftefrei sich bewegenden Massenpunkten selbst wenn uns für die letzteren nur ein enger Geschwindigkeitsbereich zur Verfügung steht. *Die Weltpunkte bilden eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit*; das ist vielleicht die sicherste Tatsache unseres gesamten Tatsachenwissens. Sind  $x_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) irgendwelche Koordinaten zur Festlegung dieser Punkte (im allgemeinen Riemannschen Sinne), so erhalten wir, wenn wir diese zugleich als Cartesische Koordinaten in einem vierdimensionalen Euklidischen Raum deuten, eine stetige Abbildung der Welt auf einen derartigen Euklidischen Bildraum. Das Koordinatensystem möge ein affines heißen, wenn es die ganze Welt umkehrbar-eindeutig und stetig auf einen Euklidischen Bildraum in der Weise abbildet, daß die Weltlinien aller kräftefrei sich bewegenden Massenpunkte im Bilde gerade Linien erscheinen. Daß es derartige Koordinatensysteme gibt, der Inhalt des Galileischen Trägheitsgesetzes. Durch die Forderung der Affinität ist aber das Koordinatensystem bis auf eine lineare Transformation bestimmt; d. h. sind in einem zweiten affinen Koordinatensystem  $x'_i$  die Koordinaten desselben willkürlichen Weltpunktes, der im ersten die Koordinaten  $x_i$  besitzt, so müssen die  $x'_i$  lineare Funktionen der  $x_i$  sein. Denn zwei affine Koordinatensysteme liefern zwei Euklidische Abbildungen der Welt; diese beiden Euklidischen Räume sind somit durch Vermittlung der Welt umkehrbar-eindeutig und stetig so aufeinander abgebildet, daß Gerade in Geraden übergehen. Dann gehen aber auch Ebenen in Ebenen über und parallele Gerade (d. h. Gerade, die in einer Ebene liegen, aber keinen Punkt gemein haben) in parallele Geraden. Daraus folgt nach einem wichtigen, zuerst von Möbius durch seine »Netzkonstruktion« bewiesenen Satz der Geometrie, daß diese Abbildung eine affine im gewöhnlichen Sinne ist<sup>8)</sup>. Die Möbiussche Netzkonstruktion kann so eingerichtet werden, daß die Richtungen der bei ihr benutzten Geraden einem vorgegebenen beliebig schmalen Richtungskegel entnommen werden; so daß jenes geometrische Theorem bestehen bleibt, auch wenn man nur von denjenigen Geraden, deren Richtungen diesem Kegel angehören, weiß, daß sie durch die Abbildung wieder in Gerade übergeführt werden.

Das Galileische Trägheitsgesetz allein beweist also schon vollständig, daß die Welt affin ist; mehr aber läßt sich aus ihm auch nicht ableiten. Die metrische Grundform  $(\mathfrak{x}\mathfrak{x})$  der Welt wird jetzt wie oben durch den Vorgang der Lichtausbreitung erklärt: ein in  $O$  aufgegebenes Lichtsignal trifft in dem Weltpunkt  $A$  dann und nur dann ein, wenn  $\mathfrak{x} = \overrightarrow{OA}$  die einen der beiden durch  $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0$  definierten Kegelmäntel angehört. Durch die quadratische Form bis auf einen konstanten Faktor festgelegt; um ihn zu bestimmen, muß eine individuelle Maßeinheit willkürlich gewählt werden.

## § 21. Relativistische Geometrie, Kinematik und Optik.

Einen Weltvektor  $\xi$  nennen wir *raum- oder zeitartig*, je nachdem  $(\xi\xi)$  positiv oder negativ ist. Die zeitartigen Vektoren weisen teils in die *Zukunft*, teils in die *Vergangenheit*. Wir nennen die Invariante

$$(25) \quad \Delta s = \sqrt{-(\xi\xi)}$$

für einen in die Zukunft weisenden zeitartigen Vektor  $\xi$  die *Eigenzeit* desselben; setzen wir

$$\xi = \Delta s \cdot e,$$

so ist  $e$ , die »Richtung« der zeitartigen Verschiebung  $\xi$ , ein in die Zukunft weisender Vektor, welcher der normierenden Bedingung  $(ee) = -1$  genügt.

Wie in der Galileischen, so müssen wir auch in der Einsteinschen Weltgeometrie, um alteingewurzelte Vorstellungen und Ausdrücke über Raum und Zeit anwenden und den Zusammenhang mit der Anschauung herstellen zu können, eine *Zerspaltung der Welt in Raum und Zeit* vornehmen, durch Projektion in Richtung eines in die Zukunft weisenden zeitartigen Vektors  $e$ , der durch die Bedingung  $(ee) = -1$  normiert sei. Der Vorgang der Projektion ist in § 18 eingehend besprochen; die aufgestellten Fundamentalformeln (3), (5), (5') sind hier mit  $e = -1$  anzuwenden\*). Weltpunkte, deren Verbindungsvektor zu  $e$  proportional ist, fallen in denselben Raumpunkt, den wir materiell durch einen ruhenden Massenpunkt dauernd markieren können, graphisch durch eine zu  $e$  parallele Weltgerade darstellen. Der dreidimensionale Raum  $R_e$ , der durch die Projektion entsteht, trägt eine Euklidische Metrik, da für jeden zu  $e$  orthogonalen Vektor  $\xi^*$ , d. h. jeden Vektor  $\xi^*$ , welcher der Bedingung  $(\xi^*e) = 0$  genügt,  $(\xi^*\xi^*)$  positiv ist (außer für  $\xi^* = 0$ ; vgl. § 4). Jede Verschiebung  $\xi$  der Welt spaltet sich nach der Formel

$$\xi = \Delta t | \xi:$$

$\Delta t$  ist ihre Zeitdauer (»Höhe« wurde sie in § 18 genannt),  $\xi$  die von ihr hervorgerufene Verschiebung im Raum  $R_e$ .

Bilden  $e_1, e_2, e_3$  ein Koordinatensystem in  $R_e$ , so bilden die zu  $e = e_0$  orthogonalen Weltverschiebungen  $e_1, e_2, e_3$ , durch welche jene Raumverschiebungen hervorgerufen werden, zusammen mit  $e_0$  ein »zu  $R_e$  gehöriges« Koordinatensystem für die Weltpunkte. Es ist normal, wenn die drei Vektoren  $e_i$  in  $R_e$  ein Cartesisches Koordinatensystem bilden; auf jeden Fall aber hat in ihm das Koeffizientensystem der metrischen Fundamentalform die Gestalt

\*) Die Maßeinheiten von Raum- und Zeitlängen sind dabei so gewählt, daß die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum  $= 1$  wird. Will man auf die traditionellen Einheiten des CGS-Systems geführt werden, so muß man die Normierung  $(ee) = -1$  ersetzen durch  $(ee) = -c^2$ , und es ist  $e = -c^2$  zu nehmen.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}.$$

Die Eigenzeit  $\Delta s$  eines in die Zukunft weisenden zeitartigen Vektors ( $\xi = \Delta s \cdot e$ ) ist gleich der Zeitdauer von  $\xi$  in dem Bezugsraum  $R_e$ , welchem  $\xi$  keine räumliche Verschiebung hervorruft. — Wir werden folgenden mehrere Zerspaltungen nach den Vektoren  $e, e', \dots$  nebeneinander zu betrachten haben; immer soll dabei  $e$  (ohne oder mit Index) einen in die Zukunft weisenden, zeitartigen, der Normierungsbedingung  $(ee) = -1$  genügenden Weltvektor bezeichnen.

Sei  $K$  ein Körper, der in  $R_e$ ,  $K'$  ein Körper, der in  $R_{e'}$  ruhe.  $K'$  führt in  $R_e$  eine gleichförmige Translation aus. Ist in  $R_e$ , d. h. also bei Zerspaltung nach dem Vektor  $e$ :

$$(26) \quad e' = h \mid h v,$$

so erfährt  $K'$  in  $R_e$  während der Zeitdauer  $h$  die Raumverschiebung  $h v$ , es ist demnach  $v$  die *Geschwindigkeit* von  $K'$  in  $R_e$  oder die *Relativgeschwindigkeit von  $K'$  in bezug auf  $K$* . Ihre Größe  $v$  bestimmt sich aus  $v^2 = (vv)$ . Nach (3) ist

$$(27) \quad h = -(e'e);$$

andererseits gilt nach (5)

$$1 = -(e'e) = h^2 - h^2(vv) = h^2(1 - v^2),$$

also

$$(28) \quad h = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Erfährt  $K'$  zwischen zwei Augenblicken seiner Bewegung die Weltverschiebung  $\Delta s \cdot e'$ , so zeigt (26), daß  $h \cdot \Delta s = \Delta t$  die Zeitdauer der Verschiebung in  $R_e$  ist; zwischen Eigenzeit  $\Delta s$  und Zeitdauer  $\Delta t$  der Verschiebung in  $R_e$  besteht demnach die Beziehung

$$(29) \quad \Delta s = \Delta t \sqrt{1 - v^2}.$$

Da (27) symmetrisch in  $e$  und  $e'$  ist, lehrt (28), daß die Größe  $h$  die *Relativgeschwindigkeit von  $K'$  in bezug auf  $K$  gleich derjenigen von  $K$  in bezug auf  $K'$  ist*; die vektoriellen Relativgeschwindigkeiten selber lassen sich nicht miteinander vergleichen, da die eine im Raum  $R_e$ , die andere im Raum  $R_{e'}$  liegt.

Betrachten wir drei Zerspaltungen, nach  $e, e_1, e_2$ .  $K_1, K_2$  seien zwei Körper, die bzw. in  $R_{e_1}, R_{e_2}$  ruhen. In  $R_e$  sei

$$e_1 = h_1 \mid h_1 v_1, \quad h_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2}};$$

$$e_2 = h_2 \mid h_2 v_2, \quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2}}.$$

Dann ist

$$-(e_1 e_2) = h_1 h_2 \{1 - (v_1 v_2)\}.$$

Bilden also die Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  von  $K_1$  und  $K_2$  in  $R_e$ , deren Größe  $v_1, v_2$  ist, den Winkel  $\mathcal{P}$  miteinander und ist  $v_{12} = v_{21}$  die Größe der Relativgeschwindigkeit von  $K_2$  in bezug auf  $K_1$  (oder umgekehrt), so gilt die Formel

$$(30) \quad \frac{1 - v_1 v_2 \cos \mathcal{P}}{\sqrt{1 - v_1^2} \sqrt{1 - v_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{12}^2}},$$

gemäß der sich die Relativgeschwindigkeit zweier Körper aus ihren Geschwindigkeiten bestimmt. Setzen wir für jede der Geschwindigkeitsgrößen  $v (< 1)$  unter Benutzung des Tangens hyperbolicus:

$$v = \operatorname{Tg} u,$$

so erhalten wir

$$\operatorname{Cof} u_1 \operatorname{Cof} u_2 - \operatorname{Sin} u_1 \operatorname{Sin} u_2 \cos \mathcal{P} = \operatorname{Cof} u_{12}.$$

Diese Formel geht in den Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie über, wenn man die hyperbolischen durch die entsprechenden trigonometrischen Funktionen ersetzt; also ist  $u_{12}$  die dem Winkel  $\mathcal{P}$  gegenüberliegende Seite in einem Dreieck der Bolyai-Lobatschewskyschen Ebene, dessen beide anderen Seiten  $= u_1, u_2$  sind.

Neben den Zusammenhang (29) zwischen Zeit und Eigenzeit stellt sich der zwischen Länge und Ruhlänge. Wir legen den Bezugsraum  $R_e$  zugrunde. In einem bestimmten Moment mögen sich die einzelnen Massenpunkte des Körpers in den Weltpunkten  $O, A, \dots$  befinden; die Raumpunkte  $O, A, \dots$  von  $R_e$ , in denen sie liegen, bilden eine Figur in  $R_e$ , der wir Dauer verleihen könnten, wenn der Körper  $K'$  in dem betrachteten Momente einen »Abdruck« im Raum  $R_e$  hinterließe, wie dies

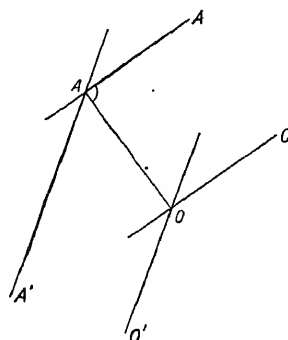


Fig. 12.

durch das am Schluß des vorigen Paragraphen besprochene anschauliche Beispiel illustriert wird. Fallen andererseits in dem Raum  $R_e$ , in welchem  $K'$  ruht, die Weltpunkte  $O, A, \dots$  in die Raumpunkte  $O', A', \dots$ , so bilden  $O', A', \dots$  die Ruhgestalt des Körpers  $K'$  (man vergleiche die Figur, in der »orthogonale« Weltrichtungen als senkrechte gezeichnet sind). Zwischen demjenigen Teil von  $R_e$ , den der Abdruck einnimmt, und der Ruhfigur des Körpers in  $R_e$  besteht eine Abbildung, durch welche allgemein die Punkte  $A, A'$  einander zugeordnet sind; sie ist offenbar affin (es handelt sich in der Tat um nichts anderes als um orthogonale Projektion). Da die Weltpunkte  $O, A$  gleichzeitig sind bei Zerspaltung nach  $e$ , so ist

$$\vec{OA} = x = 0 \mid x \text{ in } R_e; \quad x = \vec{OA}.$$

Nach der Grundformel (5) ist

$$\overline{OA}^2 = (\xi\xi) = (\xi\xi),$$

$$\overline{O'A'}^2 = (\xi\xi) + (\xi\xi')^2.$$

Bestimmen wir aber nach (5')  $(\xi\xi')$  in  $R_e$ , so kommt

$$(\xi\xi') = h(\xi v);$$

also wird

$$\overline{O'A'}^2 = (\xi\xi) + \frac{(\xi v)^2}{1 - v^2}.$$

Benutzen wir in  $R_e$  ein Cartesisches Koordinatensystem  $x_1 x_2 x_3$  mit als Anfangspunkt, dessen  $x_1$ -Achse in die Richtung der Geschwindigkeit fällt, und sind  $x_1 x_2 x_3$  die Koordinaten von  $A$ , so haben wir

$$\overline{OA}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

$$\overline{O'A'}^2 = \frac{x_1^2}{1 - v^2} + x_2^2 + x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2,$$

wenn man

$$(31) \quad x_1' = \frac{x_1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3$$

setzt. Indem man in  $R_e$  jedem Punkt mit den Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  den Punkt mit den aus (31) sich ergebenden Koordinaten  $(x_1', x_2', x_3')$  zuordnet, führt man eine Dilatation des Abdrucks in Richtung der Körperbewegung im Verhältnis  $1 : \sqrt{1 - v^2}$  durch. Unsere Formeln besagen, daß dadurch der Abdruck in eine zur Ruhegestalt des Körpers kongruente Figur übergeht: das ist die *Lorentz-Kontraktion*. Insbesondere steht zwischen dem Volumen  $V$ , das der Körper  $K'$  in einem bestimmten Augenblick im Raum  $R_e$  einnimmt, und seinem Ruhvolumen  $V_0$  die Beziehung

$$V = V_0 \sqrt{1 - v^2}.$$

Alle optischen Winkelmessungen durch Anvisieren stellen die Winkel zwischen Lichtstrahlen in demjenigen Bezugsraum fest, in welchem (aus starrem Material gebaute) Meßinstrument ruht. *Diese Winkel sind es auch, wenn wir das Meßinstrument durch das Auge ersetzen, was maßgebend sind für die von einem Beobachter anschaulich erfaßte Gestalt der in seinem Gesichtsfeld befindlichen Gegenstände.* Um den Zusammenhang zwischen Geometrie und Beobachtung geometrischer Größen herzustellen, müssen wir daher noch auf optische Verhältnisse eingehen.

Die einem Lichtstrahl entsprechenden Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen haben sowohl im Äther wie in einem homogenen Medium, das in einem zulässigen Bezugsraum ruht, diese Form, daß die Komponenten der Zustandsgrößen (bei komplexer Schreibweise) alle

$$= \text{konst. } e^{2\pi i \Theta(P)}$$

sind, wo  $\Theta = \Theta(P)$ , die durch diesen Ansatz nur bis auf eine additive Konstante bestimmte »Phase«, eine Funktion des als Argument auftretenden

Welpunktes ist. Nach Ausführung irgend einer linearen Transformation der Weltkoordinaten werden die Komponenten im neuen Koordinatensystem abermals die gleiche Gestalt besitzen, mit derselben Phasenfunktion  $\Theta$ . Die Phase ist demnach eine Invariante. Für eine ebene Welle ist sie eine *lineare* und, wenn wir absorbierende Medien ausschließen, reelle Funktion der Weltkoordinaten von  $P$  und die Phasendifferenz in zwei beliebigen Punkten  $\Theta(B) - \Theta(A)$  mithin eine Linearform der willkürlichen Verschiebung  $\mathfrak{x} = \overrightarrow{AB}$ , also ein kovarianter Weltvektor. Stellen wir diesen durch die korrespondierende Verschiebung  $\mathfrak{l}$  dar (wir sprechen kurz von dem »Lichtstrahl  $\mathfrak{l}$ «), so ist also

$$\Theta(B) - \Theta(A) = (\mathfrak{l}\mathfrak{x}).$$

Spalten wir nach einem zeitarbeitigen Vektor  $\mathfrak{e}$  in Raum und Zeit und setzen

$$(32) \quad \mathfrak{l} = \nu \mid \frac{\nu}{q} \mathfrak{a}$$

in solcher Weise, daß der Raumvektor  $\mathfrak{a}$  in  $R_e$  die Länge 1 besitzt,

$$\mathfrak{x} = \Delta t \mid \mathfrak{x},$$

so ist die Phasendifferenz

$$= \nu \left\{ \frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{x})}{q} - \Delta t \right\}.$$

Daraus geht hervor, daß  $\nu$  die Frequenz bedeutet,  $q$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und  $\mathfrak{a}$  die Richtung des Lichtstrahls im Raume  $R_e$ . Im Äther ist, wie sich noch aus den Maxwellschen Gleichungen ergibt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $q = 1$  oder

$$(\mathfrak{l}\mathfrak{l}) = 0.$$

Spalten wir die Welt auf zweierlei Art, einmal nach  $\mathfrak{e}$ , ein andermal nach  $\mathfrak{e}'$ , in Raum und Zeit und unterscheiden die auf die eine und andere Spaltung bezüglichen Größen durch den Akzent, so ergibt sich nun sofort aus der Invarianz von  $(\mathfrak{l}\mathfrak{l})$  das Gesetz

$$(33) \quad \nu^2 \left( \frac{1}{q^2} - 1 \right) = \nu'^2 \left( \frac{1}{q'^2} - 1 \right).$$

Fassen wir zwei Lichtstrahlen  $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2$  mit den Frequenzen  $\nu_1, \nu_2$  ins Auge, so ist

$$(\mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2) = \nu_1 \nu_2 \left\{ \frac{(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)}{q^2} - 1 \right\}.$$

Bilden jene also den Winkel  $\omega$  miteinander, so gilt

$$(34) \quad \nu_1 \nu_2 \left\{ \frac{\cos \omega}{q^2} - 1 \right\} = \nu'_1 \nu'_2 \left\{ \frac{\cos \omega'}{q'^2} - 1 \right\}.$$

Für den Äther lauten diese Gleichungen

$$(35) \quad q = q' (= 1), \quad \nu_1 \nu_2 \sin^2 \frac{\omega}{2} = \nu'_1 \nu'_2 \sin^2 \frac{\omega'}{2}.$$

Um endlich den Zusammenhang zwischen den Frequenzen  $\nu$  und  $\nu'$  zugeben, nehmen wir einen Körper an, der in  $R_e$  ruht; er hat im Raum  $R_e$  die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , so daß wie früher

$$(26) \quad e' = h | \mathbf{h} \mathbf{v} \text{ in } R_e$$

zu setzen ist. Aus (26) und (32) folgt

$$\nu' = - (1 e') = \nu h \left\{ 1 - \frac{(\mathbf{a} \mathbf{v})}{q} \right\}.$$

Bildet demnach die Richtung des Lichtstrahls in  $R_e$  mit der Geschwindigkeit des Körpers den Winkel  $\vartheta$ , so ist

$$(36) \quad \frac{\nu'}{\nu} = \frac{1 - \frac{v \cos \vartheta}{q}}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

(36) ist das *Dopplersche Prinzip*. Da beispielsweise ein Natriummolekül, in einem zulässigen Bezugsraum ruhend, immer objektiv dasselbe sein wird, so besteht dieser Zusammenhang zwischen der in einem ruhenden Spektroskop beobachteten Frequenz  $\nu'$  eines ruhenden Natriummoleküls und der Frequenz  $\nu$  eines mit der Geschwindigkeit  $v$  sich bewegenden Natriummoleküls;  $\vartheta$  ist der Winkel, welchen die Bewegungsrichtung des Moleküls mit der Richtung des Lichtstrahls bildet. — Setzen wir (36) in (35) ein, so bekommen wir eine Gleichung zwischen  $q$  und  $q'$ : sie geht aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $q'$  des Lichtes in einem ruhenden Medium, z. B. in Wasser, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $q$  im bewegten Medium zu berechnen;  $v$  ist jetzt die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers,  $\vartheta$  der Winkel, den die Strömungsrichtung des Wassers mit dem Lichtstrahl schließt. Lassen wir insbesondere diese beiden Richtungen zusammenfallen und vernachlässigen höhere Potenzen von  $v$  (das ja in praktischen Fällen sehr klein ist gegen die Lichtgeschwindigkeit), so bekommen wir

$$q = q' + v(1 - q'^2);$$

nicht mit ihrem vollen Betrage  $v$ , sondern nur mit dem Bruchteil  $v n$  desselben ( $n = \frac{1}{q}$  der Brechungsindex des Mediums) addiert sich  $v$  zur Geschwindigkeit des Mediums zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

»Mitführungskoeffizient«  $1 - \frac{1}{n^2}$  war bereits lange vor der Relativitätstheorie

von Fizeau experimentell dadurch festgestellt worden, daß Strahlen, die von der gleichen Lichtquelle entstammende Strahlen, deren einer durch Wasser läuft, zur Interferenz kommen. Daß die Relativitätstheorie dieses merkwürdige Resultat erklärt, daß sie für die Optik und Elektrodynamik bewegter Medien Geltung hat (und daß in solchen nicht etwa, wie man nach der in ihnen geltenden Wellengleichung vielleicht vermuten könnte, ein Relativitätsprinzip das aus dem Lorentz-Einsteinschen hervorgeht, wenn man  $c$  durch

setzt). Die Formel (34) endlich wollen wir für den Äther  $q = q' = 1$  spezialisieren — vgl. (35):

$$\sin^2 \frac{\omega}{2} = \frac{(1 - v \cos \vartheta_1)(1 - v \cos \vartheta_2)}{1 - v^2} \sin^2 \frac{\omega'}{2}.$$

Ist der Bezugsraum  $R_e$  derjenige, auf welchen sich die Planetentheorie bezieht (und in dem der Schwerpunkt des Sonnensystems ruht), der Körper die Erde (auf der sich das Beobachtungsinstrument befindet),  $v$  ihre Geschwindigkeit in  $R_e$ ,  $\omega$  der Winkel in  $R_e$ , den die zum Sonnensystem gelangenden Strahlen zweier unendlichferner Sterne miteinander bilden,  $\vartheta_1, \vartheta_2$  die Winkel, welche diese Strahlen mit der Bewegungsrichtung der Erde in  $R_e$  einschließen, so bestimmt sich der Winkel  $\omega'$ , unter dem die Sterne von der Erde aus beobachtet werden, durch diese Gleichung.  $\omega$  können wir freilich nicht messen, aber wir beobachten die mit den Änderungen von  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  im Laufe des Jahres verbundenen Änderungen von  $\omega'$  (*Aberration*).

Die Formeln für den Zusammenhang zwischen Zeit und Eigenzeit, Volumen und Ruhvolumen gelten auch für *ungleichförmige Bewegung*. Ist  $d\tilde{x}$  die unendlichkleine Verschiebung, welche ein sich bewegendes Massenpunkt in einem unendlichkleinen Zeitraum in der Welt erfährt, so wird durch

$$d\tilde{x} = ds \cdot u, \quad (uu) = -1, \quad ds > 0$$

Eigenzeit  $ds$  und Weltrichtung  $u$  dieser Verschiebung erklärt. Das über irgend ein Stück der Weltlinie erstreckte Integral

$$\int ds = \int \sqrt{-(d\tilde{x}, d\tilde{x})}$$

ist die während dieses Teiles der Bewegung verfließende »Eigenzeit«; sie ist unabhängig von jeder willkürlichen Zerspaltung der Welt in Raum und Zeit und wird bei nicht zu stürmischer Beschleunigung durch eine mit dem Massenpunkt verbundene Uhr angegeben werden. Benutzen wir irgendwelche affine Koordinaten  $x_i$  in der Welt und die Eigenzeit  $s$  als Parameter zur analytischen Darstellung der Weltlinie (so wie wir in der dreidimensionalen Geometrie die Bogenlänge gebrauchen), so sind

$$\frac{dx_i}{ds} = u^i$$

die (kontravarianten) Komponenten von  $u$ , und es ist  $\sum_i u_i u^i = -1$ .

Zerspalten wir die Welt nach  $e$  in Raum und Zeit, so gilt

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left| \begin{array}{c} 1 \\ \mathbf{v} \end{array} \right| \text{ in } R_e,$$

wo  $\mathbf{v}$  die Geschwindigkeit des Massenpunktes ist, und zwischen der während der Verschiebung  $d\tilde{x}$  verfließenden Zeit  $dt$  in  $R_e$  und der Eigenzeit  $ds$  besteht der Zusammenhang

$$(37) \quad ds = dt \sqrt{1-v^2}.$$

Liegen zwei Weltpunkte  $A, B$  so zueinander, daß  $\overrightarrow{AB}$  ein in die Zukunft gerichteter zeitartiger Vektor ist, so kann  $A$  mit  $B$  durch Weltlinien verbunden werden, deren Richtung überall gleichfalls dieser Bedingung nügt; es können also in  $A$  abgehende Massenpunkte nach  $B$  gelangen. Die von ihnen dazu benötigte Eigenzeit ist abhängig von der Weltlinie, die sie ist am längsten für einen Massenpunkt, der in gleichförmiger Translation von  $A$  nach  $B$  fliegt. Denn zerspalten wir so in Raum und Zeit, daß  $A$  und  $B$  in den gleichen Raumpunkt fallen, so ist diese Bewegung die Ruhe, und die Behauptung geht aus der Formel (37) hervor, welche lehrt, daß die Eigenzeit  $s$  hinter der Zeit  $t$  zurückbleibt. — Der Lebensprozeß eines Menschen kann sehr wohl mit einer Uhr verglichen werden. Von zwei Zwillingsbrüdern, die sich in einem Weltpunkt  $A$  trennen, bleibt der eine in der Heimat (d. h. ruhe dauernd in einem tauglichen Bezugssystem), der andere aber unternimmt Reisen, bei denen er Geschwindigkeiten (relativ zur »Heimat«) entwickelt, die der Lichtgeschwindigkeit nahekommen; dann wird sich der Reisende, wenn er dereinst in die Heimat zurückkehrt, als merklich jünger herausstellen denn der sesshafte Bruder.

Ein Massenelement  $dm$  (eines kontinuierlich ausgedehnten Körpers) das sich mit einer Geschwindigkeit von der Größe  $v$  bewegt, nimmt zu einem bestimmten Moment ein Volumen  $dV$  ein, das mit seinem Ruhvolumen  $dV_0$  durch die Formel zusammenhängt:

$$dV = dV_0 \sqrt{1 - v^2},$$

Für Dichte  $\frac{dm}{dV} = \mu$  und Ruhdichte  $\frac{dm}{dV_0} = \mu_0$  gilt demnach die Gleichung

$$\mu_0 = \mu \sqrt{1 - v^2}.$$

$\mu_0$  ist eine Invariante,  $\mu_0 u^i$  mit den Komponenten  $\mu_0 u^i$  also ein die Bewegung der Masse unabhängig vom Koordinatensystem bestimmender kontravarianter Vektor, der »materielle Strom«. Er genügt der Kontinuitätsgleichung

$$\sum_i \frac{\partial (\mu_0 u^i)}{\partial x_i} = 0.$$

Dieselben Bemerkungen finden Anwendung auf die Elektrizität: haftet die Ladung an der Materie und ist  $de$  die elektrische Ladung des Massenelements

$dm$ , so besteht zwischen Ruhdichte  $\varrho_0 = \frac{de}{dV_0}$  und Dichte  $\varrho = \frac{de}{dV}$  der Zusammenhang

$$\varrho_0 = \varrho \sqrt{1 - v^2},$$

und

$$s^i = \varrho_0 u^i$$

sind die kontravarianten Komponenten des »elektrischen (Vierer-) Stroms«, das entspricht genau dem Ansatz in § 19. In der phänomenologischen Maxwellschen Theorie der Elektrizität wird die verborgene Bewegung

Elektronen als Bewegung der Materie nicht mitberücksichtigt, folglich haftet dort die Elektrizität nicht an der Materie. Die einem Stück Materie zukommende Ladung kann dann nicht anders erklärt werden als: diejenige Ladung, welche sich gleichzeitig in demselben Raumstück befindet, das in dem betr. Moment von der Materie eingenommen wird; daraus geht hervor, daß sie nicht wie in der Elektronentheorie eine durch das Materiestück bestimmte Invariante ist, sondern abhängig von der Zerspaltung der Welt in Raum und Zeit.

### § 22. Elektrodynamik bewegter Körper.

Mit der Zerspaltung der Welt in Raum und Zeit ist eine Zerspaltung aller Tensoren verbunden; wie diese geschieht, wollen wir zunächst rein mathematisch betrachten, um sie dann auf die Herleitung der elektrodynamischen Grundgleichungen für bewegte Körper anzuwenden. Es handle sich um einen  $n$ -dimensionalen metrischen Raum, den wir als »Welt« bezeichnen, mit der metrischen Grundform  $(\xi\xi)$ . Sei  $e$  ein Vektor in ihm, für welchen  $(ee) = e \neq 0$  ist: nach ihm spalten wir in bekannter Weise die Welt in Zeit und Raum  $R_e$ .  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  möge irgend ein Koordinatensystem im Raum  $R_e$  sein und  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  diejenigen zu  $e = e_0$  orthogonalen Verschiebungen der Welt, welche  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  in  $R_e$  hervorrufen. In dem »zu  $R_e$  gehörigen« Koordinatensystem  $e_i (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$  für die Welt hat das Schema der kovarianten Komponenten des metrischen Fundamentaltensors die Gestalt

$$\begin{vmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & g_{12} \\ 0 & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \quad (n = 3).$$

Wir fassen als Beispiel einen Tensor 2. Stufe (im weiteren Sinne) ins Auge, der in diesem Koordinatensystem die Komponenten  $T_{ik}$  besitze. Er spaltet, wie wir behaupten, in einer durch  $e$  allein bestimmten Weise nach dem folgenden Schema

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| $T_{00}$ | $T_{01}$ | $T_{02}$ |
| $T_{10}$ | $T_{11}$ | $T_{12}$ |
| $T_{20}$ | $T_{21}$ | $T_{22}$ |

in einen Skalar, zwei Vektoren und einen Tensor 2. Stufe in  $R_e$ , die hier durch ihre Komponenten im Koordinatensystem  $e_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$  charakterisiert sind.

Spaltet nämlich die beliebige Weltverschiebung  $\xi$  nach  $e$  wie folgt:

$$\xi = \xi | e,$$

und gilt bei Zerlegung in einen zu  $e$  proportionalen und einen zu  $e$  orthogonalen Summanden

$$\xi = \xi e + \xi^*,$$

so ist, wenn  $\mathfrak{x}$  die Komponenten  $\xi^i$  hat:

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=0}^{n-1} \xi^i e_i, \quad \xi = \xi^0, \quad \mathfrak{x}^* = \sum_{i=1}^{n-1} \xi^i e_i, \quad \mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{n-1} \xi^i e_i.$$

Ohne Benutzung eines Koordinatensystems läßt sich daher die Zerlegung des Tensors so darstellen. Sind  $\mathfrak{x}$ ,  $\mathfrak{y}$  zwei willkürliche Verschiebungen der Welt und setzen wir

$$(38) \quad \mathfrak{x} = \xi e + \mathfrak{x}^*, \quad \mathfrak{y} = \eta e + \mathfrak{y}^*,$$

so daß  $\mathfrak{x}^*$  und  $\mathfrak{y}^*$  orthogonal zu  $e$  sind, so ist die zum Tensor 2. Stufe gehörige Bilinearform

$$T(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = \xi\eta T(ee) + \eta T(\mathfrak{x}^*e) + \xi T(e\mathfrak{y}^*) + T(\mathfrak{x}^*\mathfrak{y}^*).$$

Wir bekommen also, wenn wir für zwei beliebige Verschiebungen Raumes  $\mathfrak{x}$ ,  $\mathfrak{y}$  unter  $\mathfrak{x}^*$ ,  $\mathfrak{y}^*$  die zu  $e$  orthogonalen Verschiebungen der Welt verstehen, welche sie hervorrufen,

1) einen Skalar  $T(ee) = J = J$ ,

2) zwei Linearformen (Vektoren) im Raum  $R_e$ , definiert durch

$$L(\mathfrak{x}) = T(\mathfrak{x}^*e), \quad L'(\mathfrak{x}) = T(e\mathfrak{x}^*),$$

3) eine Bilinearform (Tensor) im Raum  $R_e$ , definiert durch

$$T(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = T(\mathfrak{x}^*\mathfrak{y}^*).$$

Sind  $\mathfrak{x}$ ,  $\mathfrak{y}$  beliebige Weltverschiebungen, welche  $\mathfrak{x}$ , bzw.  $\mathfrak{y}$  in  $R_e$  hervorrufen, so muß man in diesen Definitionen  $\mathfrak{x}^*$ ,  $\mathfrak{y}^*$  nach (38) durch  $\mathfrak{x} - \eta e$  ersetzen, wo

$$\xi = \frac{1}{c} (\mathfrak{x}e), \quad \eta = \frac{1}{c} (\mathfrak{y}e).$$

Setzen wir noch

$$T(\mathfrak{x}e) = L(\mathfrak{x}), \quad T(e\mathfrak{x}) = L'(\mathfrak{x}),$$

so erhalten wir dann

$$(39) \quad \begin{cases} L(\mathfrak{x}) = L(\mathfrak{x}) - \frac{J}{c} (\mathfrak{x}e), & L'(\mathfrak{x}) = L'(\mathfrak{x}) - \frac{J}{c} (\mathfrak{x}e); \\ T(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = T(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) - \frac{1}{c} (\mathfrak{y}e) L(\mathfrak{x}) - \frac{1}{c} (\mathfrak{x}e) L'(\mathfrak{y}) + \frac{J}{c^2} (\mathfrak{x}e)(\mathfrak{y}e) \end{cases}$$

Die auf der linken Seite stehenden Linear- und Bilinearformen (Vektoren und Tensoren) in  $R_e$  können durch die auf der rechten Seite stehenden aus ihnen eindeutig sich bestimmenden Vektoren und Tensoren dargestellt werden. In der obigen Komponentendarstellung korrespondiert

$$T = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} \text{ repräsentiert wird durch } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{21} & T_{22} \end{vmatrix}$$

Man sieht sofort ein, daß in allen Rechnungen die Tensoren des Raumes durch die repräsentierenden Welttensoren ersetzt werden können.

werden wir hier nur davon Gebrauch machen, daß, wenn ein Raumtensor das  $\lambda$ -fache eines andern ist, das gleiche für die repräsentierenden Weltensoren gilt.

Legen wir dem Rechnen mit Komponenten ein beliebiges Koordinatensystem zugrunde, in welchem

$$e = (e^0, e^1, \dots, e^{n-1}),$$

so ist die Invariante

$$J = T_{ik} e^i e^k \text{ und } e = e^i e_i.$$

Die beiden Vektoren und der Tensor in  $R_e$  aber haben gemäß (39) zu Repräsentanten in der Welt die beiden Vektoren und den Tensor mit den Komponenten

$$L: L_i - \frac{J}{e} e_i, \quad L_i = T_{ik} e^k,$$

$$L': L'_i - \frac{J}{e} e_i, \quad L'_i = T_{ki} e^k;$$

$$T: T_{ik} - \frac{e_k L_i + e_i L'_k}{e} + \frac{J}{e^2} e_i e_k.$$

Im Falle eines schiefssymmetrischen Tensors (Flächentensors 1. Stufe) wird  $J = 0$  und  $L' = -L$ ; unsere Formeln reduzieren sich auf

$$L: L_i = T_{ik} e^k$$

$$T: T_{ik} + \frac{e_i L_k - e_k L_i}{e}.$$

Ein Flächentensor 1. Stufe spaltet im Raum in einen Vektor und einen Flächentensor 1. Stufe. —

Die Maxwell'schen Feldgleichungen für ruhende Körper sind in § 19 zusammengestellt worden. Von H. Hertz rührt der erste Versuch her, sie in allgemein gültiger Weise auf bewegte Körper auszudehnen. Das Faradaysche Induktionsgesetz lautet: Die zeitliche Abnahme des von einem Leiter umschlossenen Induktionsflusses ist gleich der induzierten elektromotorischen Kraft:

$$(40) \quad -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int B_n d\sigma = \int \mathfrak{E} d\tau.$$

Dabei muß, wenn sich der Leiter bewegt, das Flächenintegral links erstreckt werden über eine in den Leiter eingespannte Fläche, die sich irgendwie mit dem Leiter mitbewegt. Da das Faradaysche Induktionsgesetz experimentell gerade an solchen Fällen geprüft wird, wo die zeitliche Änderung des vom Leiter umschlossenen Induktionsflusses durch die Bewegung des Leiters bewirkt wird, war Hertz nicht im Zweifel darüber, daß auch im Falle eines bewegten Leiters dieses Gesetz zu postulieren ist. Die Gleichung  $\text{div } \mathfrak{B} = 0$  bleibt bestehen; die Vektoranalysis lehrt, daß man, sie berücksichtigend, das Induktionsgesetz (40) in die differentielle Formel

$$(41) \quad \text{rot } \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \frac{1}{c} \text{rot } [\mathfrak{v} \mathfrak{B}]$$

kleiden kann, in der  $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$  den nach der Zeit an einer festen Raumstelle genommenen Differentialquotienten bedeutet und  $v$  die Geschwindigkeit der Materie.

Gleichung (41) hat merkwürdige Konsequenzen. Denken wir uns (Wilsonscher Versuch) zwischen zwei Kondensatorplatten ein homogenes Dielektrikum, das sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$  von der Größe  $v$  zwischen ihnen bewegt; die beiden Kondensatorplatten seien leitend verbunden, und es herrsche ein homogenes Magnetfeld  $H$  parallel den Platten, senkrecht zu  $v$ . Aus (41) folgt dann, daß in dem Raum zwischen den Platten  $\mathfrak{E} - \frac{1}{c} [v \mathfrak{B}]$  sich aus einem Potential ableitet; c

dieses an den leitend verbundenen Platten  $= 0$  sein muß, folgt leicht

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{c} [v \mathfrak{B}].$$

Es entsteht also senkrecht zu den Platten ein homogenes elektrisches Feld von der Stärke

$$E = \frac{\mu}{c} v H \quad (\mu = \text{Permeabilität}).$$

Folglich muß auf den Platten eine statische Ladung mit der Oberflächendichte

$$\frac{\varepsilon \mu}{c} v H \quad (\varepsilon = \text{Dielektrizitätskonstante})$$

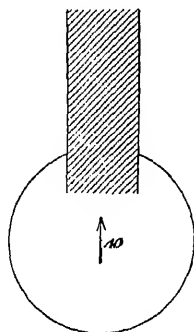


Fig. 13.

aufzutreten. Ist das Dielektrikum ein Gas, so müßte dieser Effekt auch bei beliebiger Verdünnung sich zeigen, da bei unendlicher Verdünnung  $\varepsilon \mu$  nicht gegen 0, sondern gegen 1 konvergiert. Dies hat nur einen Sinn, wenn man an den Äther glaubt; dann heißt das, daß der Effekt auftritt, wenn der Äther zwischen den Platten sich relativ zu ihnen und dem außerhalb der Platten ruhenden Äther bewegt. Zur Erklärung der Induktion aber müßte man annehmen, daß der Äther bei der Bewegung des Leitungsdrahtes von diesem mitgerissen wird. Die Beobachtung, die Fizeausche Versuch der Lichtfortpflanzung im strömenden Wasser und der Wilsonsche Versuch selber<sup>9)</sup> zeigen aber die Unrichtigkeit dieser Annahme; wie bei Fizeaus Versuch der Mitführungskoeffizient  $1 - \frac{1}{n^2}$  auftritt, so ist bei der gegenwärtigen Anordnung nur eine Aufladung von der Größe

$$\frac{\varepsilon \mu - 1}{c} v H$$

beobachtet worden, welche verschwindet, wenn  $\varepsilon \mu = 1$  wird. Das steht in unlösbarem Widerspruch zur Tatsache der Induktion des bewegten Leiters zu stehen.

Die Relativitätstheorie bringt hier die volle Aufklärung. Setzen wir wieder, wie in § 19,  $ct = x_0$  und fassen, wie dort  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{B}$  zum Felde  $F$ , so auch  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{H}$  zu einem Flächentensor 1. Stufe  $H$  zusammen, so lauten die Feldgleichungen

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0, \\ \sum_k \frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k} = s^i. \end{array} \right.$$

Sie gelten, wenn wir die  $F_{ik}$  als die kovarianten,  $H^{ik}$  als die kontravarianten Komponenten je eines Flächentensors 1. Stufe auffassen, die  $s^i$  aber als kontravariante Komponenten eines Vektors in der vierdimensionalen Welt, wegen ihres invarianten Charakters in einem beliebigen affinen Koordinatensystem. Die Materialgesetze

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{s} = \sigma \mathfrak{E}$$

aber besagen: spalten wir die Welt derart in Raum und Zeit, daß die Materie ruht, und spaltet dabei  $F$  in  $\mathfrak{E} | \mathfrak{B}$ ,  $H$  in  $\mathfrak{D} | \mathfrak{H}$  und  $s$  in  $\varrho | \mathfrak{s}$ , so gelten jene Beziehungen. Benutzen wir nunmehr ein beliebiges Koordinatensystem und hat in ihm die Weltrichtung der Materie die Komponenten  $u^i$ , so formulieren sich diese Tatsachen nach unsern obigen Ausführungen so:

$$(43) \quad H_i^* = \varepsilon F_i^*,$$

$$\text{wo} \quad F_i^* = F_{ik} u^k, \quad H_i^* = H_{ik} u^k$$

ist;

$$(44) \quad F_{ik} - (u_i F_k^* - u_k F_i^*) = \mu \{H_{ik} - (u_i H_k^* - u_k H_i^*)\}$$

und

$$(45) \quad s_i - u_i (s_k u^k) = \sigma F_i^*.$$

Das ist die invariante Form jener Gesetze. Für die Durchrechnung ist es noch bequem, (44) durch die unmittelbar daraus sich ergebenden Gleichungen

$$(46) \quad F_{kl} u_i + F_{li} u_k + F_{ik} u_l = \mu \{H_{kl} u_i + H_{li} u_k + H_{ik} u_l\}$$

zu ersetzen. Sie gelten ihrer Herleitung nach nur für Materie, die in gleichförmiger Translation begriffen ist; wir dürfen sie aber auch als gültig betrachten für beliebig bewegte Materie, wenn deren Geschwindigkeit zeitlich und örtlich nicht zu rasch veränderlich ist.

Nachdem wir so die invariante Gestalt gewonnen haben, können wir jetzt nach einem beliebigen  $e$  spalten; in  $R_e$  mögen die Meßinstrumente, die zur Messung der ponderomotorischen Wirkungen des Feldes benutzt werden, ruhen. Wir verwenden ein zu  $R_e$  gehöriges Koordinatensystem und setzen also

$$(F_{10}, F_{20}, F_{30}) = (E_1, E_2, E_3) = \mathfrak{E}$$

$$(F_{23}, F_{31}, F_{12}) = (B_{23}, B_{31}, B_{12}) = \mathfrak{B}$$

$$(H_{10}, H_{20}, H_{30}) = (D_1, D_2, D_3) = \mathfrak{D}$$

$$(H_{23}, H_{31}, H_{12}) = (\mathfrak{H}_{23}, \mathfrak{H}_{31}, \mathfrak{H}_{12}) = \mathfrak{H}$$

$$s^0 = \varrho; \quad (s^1, s^2, s^3) = (s^1, s^2, s^3) = \mathfrak{s}$$

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}; \quad (u^1, u^2, u^3) = \frac{(v^1, v^2, v^3)}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}},$$

dann ergeben sich zunächst wiederum die *Maxwellschen Feldgleichungen*, die somit nicht nur für ruhende, sondern auch für bewegte Materie unveränderter Form gültig sind. Verstößt aber das nicht aufs krassste gegen die Induktionsbeobachtungen, die doch ein Zusatzglied wie in (43) zu fordern scheinen? Nein; denn durch diese Beobachtungen wird die Wahrheit nicht die Feldstärke  $\mathfrak{E}$  bestimmt, sondern der im Leiter fließende Strom; der Zusammenhang zwischen beiden ist aber für bewegte Körper ein anderer, nämlich durch die Gleichung (45) gegeben.

Schreiben wir von den Gleichungen (43), (45) die den Indizes  $i$  = entsprechenden Komponenten hin, von (46) die, welche

$$(ikl) = (230), (310), (120)$$

korrespondieren (die andern sind überschüssig), so ergibt sich, wie ohne weiteres übersieht, folgendes. Wird

$$\mathfrak{E} + [\mathbf{v}\mathfrak{B}] = \mathfrak{E}^*, \quad \mathfrak{D} + [\mathbf{v}\mathfrak{H}] = \mathfrak{D}^*,$$

$$\mathfrak{B} - [\mathbf{v}\mathfrak{E}] = \mathfrak{B}^*, \quad \mathfrak{H} - [\mathbf{v}\mathfrak{D}] = \mathfrak{H}^*$$

gesetzt, so ist

$$\mathfrak{D}^* = \varepsilon \mathfrak{E}^*, \quad \mathfrak{H}^* = \mu \mathfrak{H}^*.$$

Zerlegen wir außerdem  $\mathfrak{s}$  in den »Konvektionsstrom«  $\mathfrak{c}$  und »Leitungsstrom«  $\mathfrak{s}^*$ :

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{c} + \mathfrak{s}^*;$$

$$\mathfrak{c} = \varrho^* \mathbf{v}, \quad \varrho^* = \frac{\varrho - (\mathbf{v}\mathfrak{s})}{1 - v^2},$$

so ist ferner

$$\mathfrak{s}^* = \frac{\sigma \mathfrak{E}^*}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Jetzt klärt sich alles auf: der Strom ist teils Konvektionsstrom, resultierend aus der Bewegung der geladenen Materie, teils Leitungsstrom, bedingt durch die Leitfähigkeit  $\sigma$  der Substanz. Der Leitungsstrom beruht nicht auf dem Ohmschen Gesetz, wenn die elektromotorische Kraft durch das Linienintegral von  $\mathfrak{E}$ , sondern von  $\mathfrak{E}^*$  definiert wird.  $\mathfrak{E}^*$  aber gilt genau die zu (41) analoge Gleichung

$$\text{rot } \mathfrak{E}^* = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \text{rot}[\mathbf{v}\mathfrak{B}]$$

( $c$  ist jetzt durchgängig  $= 1$  genommen) oder, integral geschrieben wie (40),

$$-\frac{d}{dt} \int B_n d\sigma = \int \mathfrak{G}^* dr.$$

Damit ist die Faradaysche Induktion in bewegten Leitern vollkommen erklärt. Was den Wilsonschen Versuch betrifft, so gilt nach der jetzigen Theorie rot  $\mathfrak{G} = 0$ , und es wird demnach  $\mathfrak{G} = 0$  sein zwischen den Platten. Daraus ergibt sich aber für die konstanten Beträge der einzelnen Vektoren (von denen die elektrischen senkrecht zu den Platten, die magnetischen parallel den Platten senkrecht zur Geschwindigkeit gerichtet sind):

$$E^* = v B^* = v \mu H^* = \mu v (H + v D) \\ D = D^* - v H = \varepsilon E^* - v H.$$

Setzen wir den Ausdruck von  $E^*$  aus der ersten Gleichung ein, so kommt

$$D = v \{ (\varepsilon \mu - 1) H + \varepsilon \mu v D \}, \\ D = \frac{\varepsilon \mu - 1}{1 - \varepsilon \mu v^2} v H.$$

Das ist der Wert der flächenhaften Ladungsdichte, die sich auf den Kondensatorplatten herstellt; er stimmt mit den Beobachtungen überein, da wegen der Kleinheit von  $v$  der Nenner in unserer Formel außerordentlich wenig von 1 verschieden ist.

Die Grenzbedingungen an der Grenze der Materie gegen den Äther ergeben sich daraus, daß die Feldgrößen  $F$  und  $H$  keine sprunghafte Änderung erleiden werden, wenn man mit der Materie mitgeht; wohl aber werden sie im allgemeinen an einer festen, zunächst im Äther gelegenen Raumstelle einen Sprung in dem Momente erleiden, wo sich die Materie über diesen Punkt hinüberschiebt. Ist  $s$  die Eigenzeit eines Materieelements, so muß also

$$\frac{d F_{ik}}{ds} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} u^l$$

überall endlich bleiben. Setzen wir

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = - \left( \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} \right),$$

so sieht man, daß dieser Ausdruck

$$= \frac{\partial F_k^*}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i^*}{\partial x_k}$$

ist.  $\mathfrak{G}^*$  kann folglich keine Flächenwirbel besitzen (und  $\mathfrak{B}$  keine Flächendivergenz).

Die Grundgleichungen für bewegte Körper sind in der hier gegebenen Form im wesentlichen schon von Lorentz vor der Entdeckung des Relativitätsprinzips aus der Elektronentheorie hergeleitet worden. Das ist aber kein Wunder, da ja die Maxwellschen Grundgesetze für den Äther dem Relativitätsprinzip genügen und die Elektronentheorie durch Mittelwertbildung aus

diesen Gesetzen die für die Materie gültigen herleitet. Der Fizeausche, der Wilsonsche und noch ein analoger, der Röntgen-Eichenwaldsche Versuch<sup>10)</sup> beweisen, daß für das elektromagnetische Verhalten der Materie das Relativitätsprinzip Geltung besitzt; die Probleme der Elektrodynamik für bewegte Körper waren es, die Einstein zu seiner Aufstellung führten. Minkowski verdanken wir die klare Einsicht, daß die Grundgleichungen für bewegte Körper durch das Relativitätsprinzip eindeutig festgelegt sind, wenn man die Maxwellsche Theorie für ruhende Materie zugibt; von ihr rührt die endgültige Formulierung her<sup>11)</sup>.

Es handelt sich jetzt endlich darum, die *Mechanik*, die in ihrer klassischen Form dem Prinzip nicht Genüge leistet, ihm zu unterwerfen und zu untersuchen, ob sich die dazu nötigen Modifikationen in Einklang mit der Erfahrung befinden.

### § 23. Mechanik des Relativitätsprinzips.

Als maßgebend für die ponderomotorische Wirkung des elektromagnetischen Feldes haben wir in der Elektronentheorie einen Vektor  $\mathbf{p}$  gefunden, dessen kontravariante Komponenten

$$p^i = F^{ik} s_k = q_0 F^{ik} u_k$$

sind. Er erfüllt also die Gleichung

$$(47) \quad p^i u_i = (\mathbf{p} \mathbf{u}) = 0;$$

$\mathbf{u}$  ist die Weltrichtung der Materie. Spalten wir irgendwie in Raum und Zeit

$$(48) \quad \begin{cases} \mathbf{u} = h | h \mathbf{v} \\ \mathbf{p} = \lambda | \mathbf{p}, \end{cases}$$

so ist  $\mathbf{p}$  die Kraftdichte und, wie aus (47) oder

$$h \{ \lambda - (\mathbf{p} \mathbf{v}) \} = 0$$

hervorgeht,  $\lambda$  die Leistungsdichte.

Das Grundgesetz der dem Einsteinschen Relativitätsprinzip gemäßen Mechanik erhalten wir durch die gleiche Methode wie im vorigen Paragraphen die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Körper. Wir nehmen an, daß das Newtonsche Gesetz in demjenigen Bezugssystem, in welchem die Materie ruht, seine Gültigkeit behalte. Wir fassen die Materiestelle  $m$  ins Auge, die sich in einem bestimmten Weltpunkte befindet, und spalten nach ihrer Weltrichtung  $\mathbf{u}$  in Raum und Zeit.  $\mu_0$  sei in  $\mathbf{R}_u$  die Dichte der Materie im Punkte  $\mathbf{R}_u$ . Nach Verlauf der unendlichkleinen Zeit  $ds$  habe  $m$  die Weltrichtung  $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ . Aus  $(\mathbf{u} \mathbf{u}) = -1$  folgt

$$(\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}) = 0;$$

mithin gilt bei der Spaltung nach  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} = 1 | 0, \quad d\mathbf{u} = 0 | d\mathbf{v}, \quad \mathbf{p} = 0 | \mathbf{p}.$$

Aus

$$\mathbf{u} + d\mathbf{u} = 1 | d\mathbf{v}$$

geht hervor, daß dabei  $d\mathbf{v}$  die von  $m$  (in  $R_n$ ) während der Zeit  $ds$  gewonnene Relativgeschwindigkeit ist. Es kann kein Zweifel sein, daß das mechanische Grundgesetz lautet:

$$\mu_0 \frac{d\mathbf{v}}{ds} = \mathfrak{p}.$$

Daraus folgt aber sofort die von jeder Zerspaltung unabhängige invariante Form

$$(49) \quad \mu_0 \frac{du}{ds} = \mathfrak{p};$$

$\mu_0$  ist die *Ruhdichte*,  $ds$  die während der unendlichkleinen Verschiebung des Masseteilchens, bei welcher seine Weltrichtung den Zuwachs  $du$  erfährt, verfließende *Eigenzeit*.

Die Zerspaltung nach  $u$  wäre eine solche, die während der Bewegung des Masseteilchens wechselt. Spalten wir aber jetzt in Raum und Zeit nach irgend einem festen zeitarbeitigen, in die Zukunft weisenden, der normierenden Bedingung  $(\epsilon\epsilon) = -1$  genügenden Vektor  $\epsilon$ , so zerlegt sich (49) nach (48) in

$$(50) \quad \begin{cases} \mu_0 \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right) = \lambda, \\ \mu_0 \frac{d}{ds} \left( \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right) = \mathfrak{p}. \end{cases}$$

Bedeutet bei der jetzigen Zerspaltung  $t$  die Zeit,  $dV$  das Volumen und  $dV_0$  das Ruhvolumen des Masseteilchens in einem bestimmten Augenblick,  $m = \mu_0 dV_0$  aber dessen Masse,

$$\mathfrak{p} dV = \mathfrak{P}, \quad \lambda dV = \mathcal{A}$$

die auf das Masseteilchen einwirkende Kraft und deren Leistung, so liefern unsere Gleichungen durch Multiplikation mit  $dV$ , wenn man noch beachtet, daß

$$\mu_0 dV \cdot \frac{d}{ds} = m \sqrt{1-v^2} \cdot \frac{d}{ds} = m \cdot \frac{d}{dt}$$

ist, und daß die Masse  $m$  während der Bewegung erhalten bleibt:

$$(51) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \right) = \mathcal{A},$$

$$(52) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right) = \mathfrak{P}.$$

Das sind die mechanischen Gleichungen für den Massenpunkt. Die Impulsgleichung (52) hat gegenüber der Newtonschen nur die Änderung erfahren, daß der kinetische Impuls des Massenpunktes

$$\text{nicht} = m\mathbf{v}, \text{ sondern} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}$$

ist. Die Energiegleichung (51) mutet zunächst fremd an; entwickelt aber nach Potenzen von  $v$ , so ist

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m + \frac{mv^2}{2} + \dots,$$

und wir werden unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von  $v$  des konstanten Gliedes auf den klassischen Ausdruck  $\frac{mv^2}{2}$  für die kinetische Energie zurückgeführt.

Wie man sieht, sind die Abweichungen von der Newtonschen Mechanik wie wir vermuteten, nur von der Größenordnung des Quadrats der Lichtgeschwindigkeit gemessenen Geschwindigkeit des Massenpunktes. Bei den kleinen Geschwindigkeiten, mit denen wir es in der Mechanik stets zu tun haben, wird daher experimentell kein Unterschied festzustellen sein. Er wird erst bei Geschwindigkeiten merklich werden, die der Lichtgeschwindigkeit nahekommen; bei diesen nimmt der Trägheitswiderstand der Materie gegen die beschleunigende Kraft in solcher Weise zu, daß die Lichtgeschwindigkeit niemals erreicht wird. In den freien negativen Elektronen, die sich in den *Kathodenstrahlen* und der von einem aktiven Körper ausgehenden  $\beta$ -Strahlung bewegen, haben wir Körper kennen gelernt, deren Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit sehr nahebar ist; für sie ist nun in der Tat durch Versuche von Kaufmann, Bucherer, Ratnowski und Hupka das von der Relativitätstheorie geforderte Verhalten bei longitudinaler Beschleunigung durch ein elektrisches und transversale Beschleunigung durch ein Magnetfeld experimentell festgestellt worden.

Erst wenn wir denjenigen Grundgleichungen der Elektrodynamik, die wir in § 19 auf eine dem Relativitätsprinzip genügende invariante Form gebracht haben, die Gleichung  $s^i = \rho_0 u^i$ , die Aussage, daß die Elektrizität an der Materie haftet, und die mechanischen Grundgleichungen hinzugefügt haben, erhalten wir einen zyklisch geschlossenen Gesamten Zusammenhang, in dem eine wirkliche, von Bezeichnungskonventionen unabhängige Aussage über den Verlauf von Naturerscheinungen enthalten ist. Erst jetzt also können wir eigentlich behaupten, für ein ganz bestimmtes Gebiet, das der elektromagnetischen Vorgänge, die Gültigkeit des Relativitätsprinzips nachgewiesen zu haben.

Im elektromagnetischen Feld leitet sich der ponderomotorische Vektor  $p_i$  ab aus einem nur von den lokalen Werten der Zustandsgrößen abhängenden Tensor  $S_{ik}$  nach den Formeln

$$p_i = - \frac{\partial S_i^k}{\partial x^k}.$$

Gemäß der universellen Bedeutung, welche wir dem Energiebegriff in der Naturwissenschaft zuschreiben, haben wir anzunehmen, daß die ponderomotorische Kraft nicht nur für das elektromagnetische Feld, sondern für jedes physikalische Erscheinungsgebiet zutrifft, und daß es überhaupt zweckmäßig ist, auf den Tensor statt auf die ponderomotorische Kraft als die ursprünglich

zurückzugreifen. Für jedes Erscheinungsgebiet handelt es sich darum, zu ermitteln, in welcher Weise der Energie-Impuls-Tensor (der ein Linientensor 2. Stufe ist, so daß seine Komponenten  $S_{ik}$  stets der Symmetriebedingung genügen müssen) von den charakteristischen Feld- oder Zustandsgrößen abhängt. Auch die linke Seite der mechanischen Gleichungen

$$\mu_0 \frac{du_i}{ds} = p_i$$

kann ohne weiteres auf einen »kinetischen« Energie-Impuls-Tensor zurückgeführt werden:

$$R_{ik} = \mu_0 u_i u_k.$$

Es ist nämlich

$$\frac{\partial R_{ik}}{\partial x_k} = u_i \frac{\partial (\mu_0 u^k)}{\partial x_k} + \mu_0 u^k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite ist  $= 0$  wegen der Kontinuitätsgleichung der Materie, das zweite wegen

$$u^k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{ds} = \frac{du_i}{ds}.$$

$= \mu_0 \frac{du_i}{ds}$ . Demgemäß besagen die mechanischen Gleichungen, daß der gesamte Energie-Impuls-Tensor

$$T_{ik} = R_{ik} + S_{ik},$$

zusammengesetzt aus dem kinetischen  $R$  und dem potentiellen  $S$ , den Erhaltungssätzen genügt:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0.$$

Damit hat das Prinzip von der Erhaltung der Energie seine beste Formulierung erfahren; es ist aber nach der Relativitätstheorie unlöslich verknüpft mit dem Prinzip von der Erhaltung des Impulses, und dem Begriff des Impulses muß eine ebenso universelle Bedeutung zukommen wie dem der Energie. Drücken wir den kinetischen Tensor an einer Weltstelle in einem solchen normalen Koordinatensystem aus, relativ zu dem die Materie daselbst momentan ruht, so nehmen seine Komponenten eine außerordentlich einfache Gestalt an: es ist  $R_{00} = \mu_0$  (oder  $= c^2 \mu_0$ , wenn das  $CGS$ -System benutzt wird, in welchem  $c$  nicht  $= 1$  ist), und alle übrigen Komponenten verschwinden. Dies legt den Gedanken nahe, daß die Masse als zusammengeballte potentielle Energie aufzufassen ist, die durch den Raum fortschreitet.

## § 24. Die Materie.

Den eben ausgesprochenen Gedanken genauer auszulegen, knüpfen wir an die Bewegung eines Elektrons an. Bisher haben wir uns vorgestellt, daß in seiner Bewegungsgleichung (52) für die Kraft  $\mathfrak{P}$  diejenige

$$\mathfrak{P} = e(\mathfrak{E} + [\mathbf{v}\mathfrak{H}]) \quad (e = \text{Ladung des Elektrons})$$

einzutreten hat, die sich aus dem von außen angelegten elektrischen und magnetischen Feld  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{H}$  ergibt. Tatsächlich unterliegt aber das Elektron während der Bewegung nicht nur der Einwirkung dieses äußeren Feldes, sondern auch des von ihm selbst erzeugten und mitgeführten Feldes. Bei dessen Ermittlung tritt uns die Schwierigkeit entgegen, daß wir die Konstitution des Elektrons nicht kennen, daß uns insbesondere die Natur und Gesetzmäßigkeit des Kohäsionsdrucks unbekannt ist, der das Elektron entgegen den enormen Fliehkräften der in ihm zusammengedrängten negativen Ladung zusammenhält. Jedenfalls ist aber das ruhende Elektron mit seinem elektrischen Felde (dies rechnen wir durchaus mit dem Elektron) ein in statischem Gleichgewicht befindliches physikalisches System, und darauf allein kommt es an. Wir benutzen ein normales Koordinatensystem, in welchem das Elektron ruht. Der Energietensor (außerhalb und innerhalb des Elektrons) habe die Komponenten  $t_{ik}$ . Daß im Elektron die Ruhe herrscht, drückt sich dadurch aus, daß der Energiestrom mit den Komponenten  $t_{0i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) verschwindet. Die  $0^{\text{te}}$  der Gleichgewichtsbedingungen

$$(53) \quad \frac{\partial t_i^k}{\partial x_k} = 0$$

ergibt dann, daß die Energiedichte  $t_{00}$  von der Zeit  $x_0$  unabhängig ist. Wegen der Symmetrie sind auch die Komponenten  $t_{i0}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) Impulsdichte = 0. Ist  $\mathbf{t}^{(1)}$  der Vektor mit den Komponenten  $t_{11}, t_{12}, t_{13}$ , so liefert die Gleichgewichtsbedingung (53) ( $i = 1$ ):

$$\operatorname{div} \mathbf{t}^{(1)} = 0.$$

Wenden wir den Gaußschen Satz auf eine Fläche an, die aus einem System einer das Elektron senkrecht zur  $x_1, x_2$  oder  $x_3$  Achse durchschneidenden Ebene besteht und durch eine außerhalb des vom Elektron eingenommenen Raumgebiets verlaufende krumme Fläche geschlossen wird, so ergeben sich die Gleichungen

$$\int t_{11} dx_2 dx_3 = 0, \quad \int t_{12} dx_1 dx_3 = 0, \quad \int t_{13} dx_1 dx_2 = 0,$$

wobei sich die Integrale jedesmal über jenen ebenen Querschnitt des Elektrons erstrecken. Integriert man noch die erste Gleichung nach  $x_1$ , die zweite nach  $x_2$ , die dritte nach  $x_3$ , so findet man, daß zwar die  $t_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ), wohl aber ihre Volumintegrale  $\int t_{ik} dV_0$  verschwinden. Diese Umstände dürfen wir für jedes im statischen Gleichgewicht befindliche System als zutreffend erachten. Das gewonnenen Resultat läßt sich in einem beliebigen Koordinatensystem durch die invarianten Formeln ausdrücken:

$$(54) \quad \int t_{ik} dV_0 = E_0 u_i u_k \quad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

$E_0$  ist der (im Bezugsraum, in welchem das Elektron ruht, gemessene) Energieinhalt,  $u_i$  sind die kovarianten Komponenten der Welttrichtungsvektoren des Elektrons und  $dV_0$  das (gemäß der Vorstellung, daß der ganze Raum der Bewegung des Elektrons teilnehme, berechnete) Ruhvolumen.

Raumelements. (54) gilt streng bei gleichförmiger Translation; wir werden die Formel aber auch auf ungleichförmige Bewegung anwenden dürfen, wenn  $u$  räumlich und zeitlich nicht zu rasch veränderlich ist. Dann aber sind die Komponenten

$$\bar{p}^i = - \frac{\partial \bar{t}^{ik}}{\partial x_k}$$

der ponderomotorischen Wirkung, welche das Elektron auf sich selbst ausübt, nicht mehr  $= 0$ .

Setzen wir das Elektron als völlig masselos voraus und ist  $p_i$  die von außen einwirkende »Viererkraft«, so erfordert das Gleichgewicht, daß

$$(55) \quad \bar{p}^i + p^i = 0$$

wird. Wir spalten nach einem festen  $e$  in Raum und Zeit:

$$u = h | h v, \quad p = (p^i) = \lambda | p$$

und integrieren (55) nach dem Volumen  $dV = dV_0 \sqrt{1 - v^2}$ . Da bei Benutzung eines zu  $R_e$  gehörigen normalen Koordinatensystems

$$\begin{aligned} \int \bar{p}^i dV &= \int \bar{p}^i dx_1 dx_2 dx_3 = - \frac{d}{dx_0} \int \bar{t}^{i0} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= - \frac{d}{dx_0} (E_0 u^0 u^i \sqrt{1 - v^2}) = - \frac{d}{dt} (E_0 u^i) \end{aligned}$$

ist ( $x_0 = t$  die Zeit), so kommt dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2}} \right) &= \mathcal{A} \left( = \int \lambda dV \right), \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{E_0 v}{\sqrt{1 - v^2}} \right) &= \mathfrak{P} \left( = \int p dV \right). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind gültig, wenn die von außen angreifende Kraft  $\mathfrak{P}$

(im Vergleich zu  $\frac{E_0}{a}$ ,  $a$  = Elektronenradius) nicht zu groß ist und ihre

Dichte im Bereich des Elektrons wesentlich konstant. Sie stimmen aber genau mit den mechanischen Grundgleichungen überein, wenn nur die Masse  $m$  ersetzt wird durch  $E_0$ . Mit andern Worten: *die Trägheit ist eine Eigenschaft der Energie*. — In der Mechanik wird jedem materiellen Körper eine unveränderliche Masse  $m$  zugeschrieben, die zufolge der bekannten Art und Weise, wie sie in das Grundgesetz der Mechanik eingeht, die Trägheit, den Widerstand der Materie gegen beschleunigende Kräfte darstellt. Die Mechanik nimmt diese träge Masse als etwas Gegebenes hin, für das sie nach keiner weiteren Erklärung sucht. Hier aber erkennen wir: die in dem materiellen Körper enthaltene potentielle Energie ist die Ursache dieser Trägheit, und zwar entspricht im *CGS*-System, in welchem die Lichtgeschwindigkeit nicht  $= 1$  ist, der Energie  $E_0$  die Masse

$$(56) \quad m = \frac{E_0}{c^2}.$$

Damit ist eine neue, rein dynamische Auffassung der Materie gewonnen\*). Wie wir uns in der Relativitätstheorie von dem Glorien haben befreien müssen, daß wir einen Raumpunkt zu verschiedenen Zeiten wiedererkennen können, so *hat es jetzt auch keinen Sinn mehr, von derselben Stelle der Materie zu verschiedenen Zeiten zu sprechen*. Das Elektron, das man sich früher wohl als einen substantiellen Fremdkörper im stanzlosen elektromagnetischen Felde vorstellte, erscheint uns nunmehr als ein gegen das Feld keineswegs scharf begrenzter kleiner Bezirk, in welchem die Feldgrößen und die elektrische Dichte enorm hohe Werte annehmen. Ein solcher »Energieknoten« pflanzt sich durch den Raum nicht anders fort wie eine Wasserwelle über die Seefläche hinwegschreitet; es gibt da nicht »ein und dieselbe Substanz«, aus der das Elektron zu allen Zeiten besteht. Es existiert nur der potentielle, daneben noch ein kinetischer Energie-Impuls-Tensor. Die Spaltung zwischen beiden, die in der Mechanik auftritt, ist nur die Scheidung zwischen der breit und dünn im Felde verteilten Energie und der in den Energieknoten den Elektronen und Atomen zusammengeballten; die Grenze zwischen beiden ist durchaus fließend. Es ist die Aufgabe der Feldtheorie, zu erklären, warum das Feld eine derartige körnige Struktur besitzt und jene Energieknoten sich im Hin- und Herströmen von Energie und Impuls dauernd erhalten (wenn auch natürlich nicht völlig unveränderlich, so doch wenigstens einem außerordentlich hohen Grad von Genauigkeit): darin besteht das *Problem der Materie*. Die Maxwell-Lorentzsche Theorie kann es deshalb nicht lösen, weil in ihr der Kohäsionsdruck fehlt, welcher das Elektron zusammenhält. *Was wir gemeinhin Materie nennen, ist also Wesen nach atomistisch*; denn die diffus verteilte Feldenergie pflegt man nicht als einen materiellen Körper anzusprechen. Freilich sind die *Elektronen und Atome keine letzten unveränderlichen Elemente*, an welchen die Naturkräfte nur von außen anpacken, sie hin- und herschiebend; sondern sie sind selber kontinuierlich ausgebreitet und in ihren feinsten Details feinen fließenden Veränderungen unterworfen. Nicht das Feld begründet die Existenz der Materie als seines Trägers, sondern *die Materie ist umgekehrt eine Ausgeburt des Feldes*; die Formeln, welche die Komponenten des Energietensors  $T_{ik}$  durch die Zustandsgrößen des Feldes ausdrücken, lehren, *nach welchen Gesetzen* das Feld mit Energie und Impuls, d. h. mit Materie verknüpft ist. Da keine strenge Grenze zwischen der diffus verteilten Feldenergie und derjenigen der Elektronen und Atome besteht, müssen wir den Begriff der Materie, falls er einen *exakten* Sinn haben soll, weiter fassen als bisher: Materie nennen wir fortan dasjenige, welches dargestellt wird durch den Energie-Impuls-Tensor. In diesem Sinne ist auch das optische Feld z. B. mit Materie verknüpft. V

\*) Schon Kant lehrt in den »Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft«, daß die Materie einen Raum erfüllt nicht durch ihre bloße Existenz, sondern durch repulsive Kräfte aller ihrer Teile.

so die Materie, prinzipiell gesprochen, im Felde auflöst, löst sich die Mechanik in der Physik auf. Denn das Erhaltungsgesetz der Materie

$$(57) \quad \frac{\partial T_i^k}{\partial x_k} = 0,$$

das mechanische Grundgesetz, stellt, wenn man die  $T_{ik}$  durch die Feldgrößen ausdrückt, einen differentiellen Zusammenhang zwischen diesen dar, muß also aus den Feldgleichungen folgen. Die Materie in dem weiten Sinne, wie wir jetzt das Wort nehmen, ist dasjenige, von dem wir direkt durch unsere Sinne Kunde erhalten. Fasse ich ein Stück Eis an, so nehme ich den an der Berührungsstelle zwischen jenem Körper und meinem Sinnesleib fließenden Energiestrom als Wärme, den Impulsstrom als Druck wahr; der optische Energiestrom an der Oberfläche des Sinnesepithels meines Auges bestimmt die optischen Wahrnehmungen, die ich habe. Hinter dieser uns durch die Sinnesorgane direkt offenbarten Materie verborgen aber steckt das *Feld*. Für die Aufdeckung seiner eignen Gesetzmäßigkeit und der Gesetze, nach welchen es die Materie bestimmt, ist die Maxwellsche Theorie der erste glänzende Anfang; aber hier stehen wir mit unserer Erkenntnis noch nicht am Ziel.

Nach der Formel (56) müssen wir, um die Trägheit der Körper zu erklären, ihnen einen sehr beträchtlichen Energieinhalt zuschreiben: in 1 kg Wasser stecken  $9 \cdot 10^{23}$  Erg. Diese Energie ist zu einem kleinen Teil die Kohäsionsenergie des Körpers, welche die Moleküle zusammenhält, zu einem größeren die intramolekulare Energie, welche die Atome im Molekül bindet und die z. B. bei einer Explosion plötzlich frei wird, zu einem noch größeren die intraatomistische, welche die Bausteine des Atoms, die negativen Elektronen und den positiven Atomkern aneinander bindet und deren allmähliches Freiwerden wir in dem radioaktiven Zerfall beobachten; sie ist endlich zum weitaus größten Teil die Eigenenergie des Atomkerns und der Elektronen selbst; die letztere tritt nur in der Trägheit zu Tage, da wir bislang keine Mittel kennen — Gott sei Dank! —, sie zur »Explosion« zu bringen. *Die träge Masse verändert sich mit dem Energieinhalt*: erwärmt man einen Körper, so nimmt seine träge Masse zu, kühlt man ihn ab, so vermindert sie sich; freilich ist dieser Effekt zu klein, um der direkten Beobachtung zugänglich zu sein.

Die hier nach Laue<sup>23)</sup> allgemein für ein im statischen Gleichgewicht befindliches System durchgeführte Überlegung wurde zuerst, noch vor der Einsteinschen Entdeckung des Relativitätsprinzips, am Elektron unter Zugrundelegung spezieller Voraussetzungen über dessen Konstitution angesetzt: man nahm es als eine auf der Oberfläche oder im ganzen Innern gleichförmig geladene Kugel an, die durch allseitig gleichen, gegenwirkenden Kohäsionsdruck zusammengehalten wird. Die daraus sich er-

gebende »elektromagnetische Masse«  $\frac{E_0}{c^2}$  befindet sich in numerischer

Übereinstimmung mit der Erfahrung, wenn man dem Elektron einen

Radius von der Größenordnung  $10^{-13}$  cm zuschreibt. Man darf sich wundern, daß schon vor der Relativitätstheorie eine derartige Deutung der Elektronenträgheit möglich war; denn indem man Maxwellsche Elektrodynamik trieb, stand man ja schon immer für dieses Erscheinungsbild unbewußt auf dem Boden des Relativitätsprinzips. Die allgemeine Kenntnis von der Trägheit der Energie verdanken wir Einstein und Planck. Planck stützte sich bei der Entwicklung der Dynamik auf einen Gegensatz zum Elektron — vollständig bekannten, freilich im gewöhnlichen Sinne nicht-materiellen »Probekörper«, die Hohlraumstrahlung im thermodynamischen Gleichgewicht, wie sie sich nach dem Kirchhoffschen Gesetz in jedem von gleichmäßig temperierten Wänden umgebenen Hohlraum ausbildet.

In denjenigen phänomenologischen Theorien, in denen wir von der atomistischen Struktur der Materie absehen, denken wir uns die Materie aus Elektronen, Atomen usw. aufgespeicherte Energie stetig über den Raum verteilt; wir haben sie einfach dadurch zu berücksichtigen, daß wir den Energie-Impuls-Tensor — bezogen auf ein Koordinatensystem, in welchem die Materie ruht — als Energiedichte die Ruhmassendichte  $\mu_0$  einführen. Wir haben wir z. B. in der Hydrodynamik bei Beschränkung auf adiabatische Vorgänge zu setzen

$$|T_i^k| = \begin{vmatrix} -\mu_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{vmatrix}.$$

$p$  ist der allseitig gleiche Druck; der Energiestrom ist bei adiabatischen Vorgängen 0. Um die Komponenten dieses Tensors in einem beliebigen Koordinatensystem hinzuschreiben, setze man noch  $\mu_0 = \mu^* - p$  und erhält man die invarianten Gleichungen

$$(58) \quad \begin{aligned} T_i^k &= \mu^* u_i u^k + p \delta_i^k \\ \text{oder} \quad T_{ik} &= \mu^* u_i u_k + p \cdot g_{ik}. \end{aligned}$$

Die Ruhmassendichte ist

$$T_{ik} u^i u^k = \mu^* - p = \mu_0,$$

und sie (nicht  $\mu^*$ ) ist also bei inkompressiblen Flüssigkeiten konstant zu setzen. Wirkt auf die Flüssigkeit keine Kraft, so lauten die hydrodynamischen Gleichungen

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x_k} = 0.$$

Auf ähnliche Weise, wie es soeben mit der Hydrodynamik geschehen kann, kann auch der Elastizitätstheorie eine dem Relativitätsprinzip entsprechende Form gegeben werden<sup>15)</sup>. Es bliebe endlich noch übrig, das Gravitationsfeld, das in seiner Newtonschen Form durchaus an das Galileische Relativitätsprinzip gebunden ist, dem Einsteinschen anzunähern. Sie birgt aber ihre besonderen Rätsel in sich, auf deren Lösung im letzten Kapitel zu sprechen kommen.

## § 25. Die Miesche Theorie.

Innerhalb der Elektronen kann die Maxwell-Lorentzsche Theorie nicht gültig sein; auf dem Standpunkt der gewöhnlichen Elektronentheorie müssen wir daher das Elektron als etwas a priori Gegebenes, als einen Fremdkörper im Felde behandeln. Es ist aber von *Mie* eine allgemeinere Elektrodynamik aufgestellt worden, auf Grund deren es möglich scheint, die Materie aus dem Felde zu konstruieren<sup>16)</sup>. Wir wollen ihre Grundlagen hier kurz entwickeln — als Beispiel einer den neuen Ideen über die Materie völlig konformen physikalischen Theorie, das uns hernach noch gute Dienste leisten soll, und um an ihr zugleich das Problem der Materie genauer zu formulieren.

Wir halten daran fest, daß die in Betracht kommenden Zustandsgrößen sind: 1) der vierdimensionale Stromvektor  $s$ , die »Elektrizität«, und 2) der Flächentensor 1. Stufe  $F$ , das »Feld«. Ihre Eigengesetzlichkeit ist ausgesprochen in den Gleichungen

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{\partial s^i}{\partial x_i} = 0, \\ 2) \quad & \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 2) sind erfüllt, wenn  $F$  sich aus einem Vektor  $\varphi_i$  ableitet nach den Formeln

$$3) \quad F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i};$$

es folgt umgekehrt aus 2), daß ein Vektor  $\varphi$  existieren muß derart, daß die Gleichungen 3) bestehen. Ebenso ist 1) erfüllt, wenn  $s$  sich aus einem Flächentensor 1. Stufe  $H$  in folgender Weise ableitet:

$$4) \quad s^i = \frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k};$$

es folgt umgekehrt aus 1), daß ein diesen Relationen genügender Flächentensor  $H$  notwendig existiert. 4) stimmt formal mit dem zweiten System der Maxwellschen Gleichungen überein. Lorentz nahm an, daß allgemein, nicht bloß im Äther, sondern auch im Gebiet der Elektronen,  $H = F$  ist. Wir machen nach *Mie* die allgemeinere Voraussetzung, daß  $H$  keine bloße Rechengröße ist, sondern eine reale Bedeutung hat und seine Komponenten daher universelle Funktionen der ursprünglichen Zustandsgrößen  $s$  und  $F$  sind. Konsequenterweise müssen wir aber dann die gleiche Voraussetzung auch hinsichtlich  $\varphi$  machen! In der entstehenden Größentabelle

$$\begin{array}{c|c} \varphi & F \\ \hline s & H \end{array}$$

nennen wir mit *Mie* die in der ersten Zeile stehenden die Intensitätsgrößen, sie sind durch die Differentialgleichungen 3) miteinander ver-

knüpft; die in der zweiten Zeile stehenden, für welche die Differentialgleichungen 4) gelten, sollen hingegen die Quantitätsgrößen heißen. Später werden wir in Raum und Zeit und wenden die schon in § 19 verwendeten Bezeichnungen an, so haben wir die wohlvertrauten Gleichungen vor

$$1) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{s} = 0,$$

$$2) \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0 \quad (\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0),$$

$$3) \quad \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} + \operatorname{grad} \varphi = \mathfrak{E} \quad (-\operatorname{rot} \mathfrak{f} = \mathfrak{B}),$$

$$4) \quad \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathfrak{H} = -\mathfrak{s} \quad (\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho).$$

Kennen wir die universellen Funktionen, welche  $\varphi$  und  $H$  durch  $s$  ausdrücken, dann haben wir in den nicht eingeklammerten Gleichungen jede Komponente besonders gezählt, 10 »Hauptgleichungen« von denen durch welche die Ableitungen der 10 Zustandsgrößen nach der Zeit abhängig von diesen selbst und ihren räumlichen Ableitungen werden; also jene Form der Naturgesetze, welche durch das Kausalitätsprinzip gefordert wird. Das Relativitätsprinzip aber, das hier im Gegensatz zum Kausalitätsprinzip tritt, fordert, daß die Hauptgleichungen von den eingeklammerten »Nebengleichungen« begleitet werden, in denen keine nach der Zeit differentiierten Glieder auftreten. Die Versöhnung des Widerstreits liegt darin, daß die Nebengleichungen notwendig schüssig sind. Aus den Hauptgleichungen 2) und 3) folgt nämlich

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{B} + \operatorname{rot} \mathfrak{f}) = 0,$$

aus 1) und 4)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathfrak{D}).$$

Ein Vergleich der Mieschen mit den Lorentzschen Grundgesetzen der Elektronentheorie ist lehrreich. Bei Lorentz treten 1), 2) auf, und das Gesetz, nach welchem  $H$  durch die ursprünglichen Zustandsgrößen sich bestimmt, lautet einfach  $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ . Hingegen dort  $\varphi$  und  $\mathfrak{f}$  durch die Gleichung 3) *rechnerisch* definiert, und ein Gesetz, das die Abhängigkeit dieser Potentiale von den Zustandsgrößen des Feldes und der Elektrizität festlegt. An dessen Stelle tritt die Formel für die Dichte der ponderomotorischen Kraft und die Formel für die Bewegung der Elektronen unter dem Einfluß dieser Kraft. Da nach unserer neuen Auffassung aber das Kausalitätsprinzip sich aus den Feldgleichungen ergeben muß, ist ein Gesetz, das die Abhängigkeit der Potentiale von den Zustandsgrößen notwendig, die von Mie eben in der Annahme, daß  $\varphi$  und  $\mathfrak{f}$  die Potentiale der Elektrizität und des Magnetismus im Sinne von Helmholtz bezeichnen, gefunden wurde. Die Miesche Gleichung 3) aber in einer ganz analogen Form

resultierende elektrische Kraft, welcher nun nach Gleichung 3) die Größe  $f$  als »elektrischer Impuls« zugehört. Es ist wunderbar zu sehen, wie in der Mieschen Theorie die Grundgleichung der Elektrostatik (59), die am Anfang der Elektrizitätslehre steht, plötzlich eine viel anschaulichere Bedeutung gewinnt, indem das Potential als elektrischer Druck auftritt; das ist der gesuchte Kohäsionsdruck, welcher das Elektron zusammenhält.

Das Bisherige gibt nur ein leeres Schema, das seine Ausfüllung finden muß durch die noch unbekannten universellen Funktionen, welche die Quantitäts- mit den Intensitätsgrößen verknüpfen. Ihre Ermittlung kann bis zu einem gewissen Grade noch rein spekulativ geschehen durch die Forderung, daß für den Energie-Impuls-Tensor  $T_{ik}$  der Erhaltungssatz (57) gültig sein muß (also durch die Forderung der Geltung des Energieprinzips). Denn das ist gewiß eine notwendige Bedingung, damit sich überhaupt ein Zusammenhang der Theorie mit der Erfahrung herstellen läßt. Das Energiegesetz muß die Form haben

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S} = 0,$$

wo  $W$  die Energiedichte,  $\mathfrak{S}$  der Energiestrom ist. In der Maxwellschen Theorie findet man es, indem man 2) mit  $\mathfrak{H}$ , 4) mit  $\mathfrak{E}$  multipliziert und addiert:

$$(60) \quad \mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \operatorname{div} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] = - (\mathfrak{E} \mathfrak{s}).$$

In dieser Beziehung tritt auf der rechten Seite noch die Arbeit auf, welche zur Erhöhung der kinetischen Energie der Elektronen oder nach unserer jetzigen Auffassung zur Erhöhung der potentiellen Energie des Feldes im Gebiet der Elektronen verwendet wird. Hier muß dieses Glied also sich gleichfalls noch zusammensetzen lassen aus einem nach der Zeit differenzierten Term und einer  $\operatorname{div}$ . Behandeln wir aber die Gleichungen 1) und 3) ganz analog, wie wir eben mit 2) und 4) verfahren sind, d. h. multiplizieren 1) mit  $\varphi$  und 3) skalar mit  $\mathfrak{s}$ , so kommt

$$(61) \quad \varphi \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathfrak{s} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} + \operatorname{div} (\varphi \mathfrak{s}) = (\mathfrak{E} \mathfrak{s}).$$

Die Addition von (60) und (61) ergibt das Energiegesetz; es muß demnach der Energiestrom

$$\mathfrak{S} = [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] + \varphi \mathfrak{s}$$

sein und

$$\varphi \delta \varrho + \mathfrak{s} \delta \mathfrak{f} + \mathfrak{H} \delta \mathfrak{B} + \mathfrak{E} \delta \mathfrak{D} = \delta W$$

Zustandsgrößen  $q, \dot{q}, \mathfrak{B}, \mathfrak{D}$  auf. Um da Grundung zu sehen, wir anstelle von  $q$  und  $\mathfrak{D}$  bzw.  $q$  und  $\mathfrak{E}$  als Unabhängige ein; das wird erreicht, daß die sämtlichen Intensitätsgrößen als unabhängige Variablen fungieren. Man hat zu bilden

$$(62) \quad \frac{1}{2} L = W - \mathfrak{E} \mathfrak{D} - q \dot{q};$$

dann ist

$$\frac{1}{2} \delta L = (\mathfrak{E} \delta \mathfrak{B} - \mathfrak{D} \delta \mathfrak{E}) + (\mathfrak{B} \delta \dot{q} - q \delta \dot{q}).$$

Kennt man  $L$  als Funktion der Intensitätsgrößen, so sind durch die Gleichung die Quantitätsgrößen als Funktionen derselben bestimmt. *der zehn unbekannten universellen Funktionen haben wir jetzt nur eine,  $L$* ; das ist die Leistung des Energieprinzips.

Kehren wir zur vierdimensionalen Schreibweise zurück, so ergibt

$$(63) \quad \frac{1}{2} \delta L = \frac{1}{2} H^{ik} \delta F_{ik} + s^i \delta \varphi_i.$$

Daraus geht hervor, daß  $\delta L$ , mithin  $L$ , die »Hamiltonsche Funktion« eine Invariante ist. Die einfachsten Invarianten, welche sich von einem Vektor mit den Komponenten  $\varphi_i$  und einem Flächentensor mit den Komponenten  $F_{ik}$  bilden lassen, sind die ins Quadrat erhobenen Beträge

$$\begin{aligned} \text{des Vektors } \varphi^i: & \quad \varphi_i \varphi^i, \\ \text{des Flächentensors } F_{ik}: & \quad L^\circ = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}, \\ \text{des Vektors} & \quad F_{ik} \varphi^k \quad \text{und} \\ \text{des »Raumtensors« mit den Komponenten } F_{ki} \varphi_i + F_{li} \varphi_k + F_{li} \varphi_i & \end{aligned}$$

Wie in der dreidimensionalen Geometrie der wichtigste Kongruenz aussagt, daß ein Vektorpaar  $a, b$  im Sinne der Kongruenz vollständig charakterisiert ist durch die Invarianten  $a^2, ab, b^2$ , so läßt sich in der vierdimensionalen Geometrie leicht zeigen, daß die eben angegebenen Invarianten die aus einem Vektor  $\varphi$  und einem Flächentensor  $F$  bestehende Figur im Sinne der Kongruenz vollständig festlegen. Jede Invariante insbesondere die Hamiltonsche Funktion  $L$ , muß sich mithin durch vier Größen algebraisch ausdrücken lassen. Auf die Bestimmung des Ausdrucks reduziert die Miesche Theorie das Problem der Materie. Maxwellsche Theorie des Äthers, nach der freilich Elektronen möglich sind, ist in ihr als der Spezialfall  $L = L^\circ$  enthalten. man auch  $W$  und die Komponenten von  $\mathfrak{S}$  vierdimensional auskennt man, daß sie die (negative) 0<sup>te</sup> Zeile in dem Schema

$$(64) \quad T_i^k = F_{ir} H^{kr} + \varphi_i s^k - \frac{1}{2} L \cdot \delta_i^k$$

bilden. Die  $T_i^k$  sind also die gemischten Komponenten des Energie-Impuls-Tensors, welcher nach unseren Rechnungen dem Erhaltungssatz (57) für  $i = 0$  und demnach auch für  $i = 1, 2, 3$  genügt. Der Beweis, daß seine kovarianten Komponenten der Symmetriebedingung  $T_{ki} = T_{ik}$  genügen, wird im nächsten Kapitel nachgeholt werden.

Die Feldgesetze können in ein sehr einfaches Variationsprinzip, das *Hamiltonsche Prinzip*, zusammengefaßt werden. Wir betrachten als unabhängige Zustandsgröße jetzt allein das Potential mit den Komponenten  $\varphi_i$  und definieren das Feld durch die Gleichung

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}.$$

In die Gesetze geht die invariante Hamiltonsche Funktion  $L$  ein, welche vom Potential und Feld abhängt. Wir definieren den Stromvektor  $s$  und den Flächentensor  $H$  durch (63). Ist bei Benutzung eines beliebigen affinen Koordinatensystems

$$d\omega = \sqrt{g} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3$$

das vierdimensionale »Volumenelement« der Welt ( $-g$  die Determinante der metrischen Fundamentalform), so ist das über irgend ein Weltgebiet erstreckte Integral  $\int L d\omega$  eine Invariante; sie heißt die in dem betr. Gebiet enthaltene *Wirkungsgröße*,  $L$  ist die »Weltdichte der Wirkung«. Das Hamiltonsche Prinzip behauptet, daß die Wirkungsgröße für jedes Weltgebiet einen stationären Wert annimmt, in dem Sinne, daß

$$(65) \quad \delta \int L d\omega = 0$$

ist für jede an der Grenze des Gebiets verschwindende infinitesimale Variation  $\delta \varphi_i$  des Potentials. In der Tat ist

$$(66) \quad \frac{1}{2} \delta \int L d\omega = \int \left\{ \frac{1}{2} H^{ik} \delta F_{ik} + s^i \delta \varphi_i \right\} d\omega,$$

und da Differentiation und Variation vertauschbar sind, hat man zu setzen

$$\delta F_{ik} = \frac{\partial (\delta \varphi_i)}{\partial x_k} - \frac{\partial (\delta \varphi_k)}{\partial x_i}.$$

Es ist ferner

$$\frac{1}{2} H^{ik} \delta F_{ik} = H^{ik} \frac{\partial (\delta \varphi_i)}{\partial x_k},$$

und durch partielle Integration kommt

$$\int H^{ik} \frac{\partial (\delta \varphi_i)}{\partial x_k} d\omega = - \int \frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k} \cdot \delta \varphi_i d\omega;$$

also ergibt sich

$$\frac{1}{2} \delta \int L d\omega = \int \left\{ - \frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k} + s^i \right\} \delta \varphi_i \cdot d\omega.$$

Während 3) durch Definition sichergestellt ist, liefert somit das Hamiltonsche Prinzip die Feldgleichungen 4); 1) und 2) folgen aus 3) und 4).

So drängt sich denn schließlich die *Miesche Elektrodynamik* in das einfache Wirkungsprinzip (65) zusammen — ganz analog, wie auch die Entwicklung der Mechanik schließlich im Wirkungsprinzip gipfelte. Während aber in der Mechanik zu jedem vorgegebenen mechanischen System eine bestimmte Wirkungskfunktion  $L$  gehört, die es aus dessen Konstitution zu ermitteln gilt, haben wir es hier mit einem einzigen System, der Welt, zu tun. Das eigentliche Problem der Materie hebt damit erst an: es handelt sich darum, die der Welt zukommende Wirkungskfunktion, die »Weltfunktion«  $L$  zu bestimmen; ihm stehen wir vorerst noch ratlos gegenüber. Wählen wir in willkürlicher Weise ein  $L$ , so erhalten wir eine von dieser Wirkungskfunktion beherrschte »mögliche« Welt, in der wir uns (wenn uns nur die mathematische Analysis nicht im Stiche läßt) vollständig auskennen — viel besser als in der wirklichen. Es käme aber natürlich darauf an, unter all diesen möglichen Welten die einzige existierende *wirkliche* herauszufinden; nach allem, was wir von den Naturgesetzen wissen, muß das ihr zukommende  $L$  durch einfache mathematische Eigenschaften ausgezeichnet sein. Wieder ist die Physik, heute als Feldphysik, auf dem Wege, die Gesamtheit der Naturerscheinungen auf ein einziges Naturgesetz zurückzuführen, ein Ziel, dem sie schon einmal, als die durch Newtons Principia begründete mechanische Massenpunkt-Physik ihre Triumphe feierte, nahe zu sein glaubte. Doch ist auch heut dafür gesorgt, daß unsere Bäume nicht in den Himmel wachsen. Wir wissen ja nicht, ob wir mit denjenigen Zustandsgrößen, welche der Mieschen Theorie zugrunde liegen, zur Beschreibung der Materie ausreichen, ob sie tatsächlich rein »elektrischer« Natur ist. Vor allem aber hängt die dunkle Wolke aller jener Erscheinungen, mit denen wir uns heute notdürftig vermittels des Wirkungsquantums auseinandersetzen, über dem Land der physikalischen Erkenntnis, wer weiß, welcher neuen Umsturz drohend.

Versuchen wir es einmal mit dem folgenden Ansatz für  $L$ :

$$(67) \quad L = |F|^2 + 2w(\sqrt{\varphi_i \varphi^i})$$

( $w$  eine willkürliche Funktion einer Variablen), der sich zunächst als der einfachste, über die Maxwellsche Theorie hinausgehende darbietet, — ob schon durchaus kein Grund vorliegt, anzunehmen, daß die Weltfunktion in Wirklichkeit diese Gestalt besitzt. Wir beschränken uns auf die Betrachtung statischer Lösungen, für die

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} = 0, \quad \mathfrak{s} = \mathfrak{f} = 0$$

ist. Wir haben

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \text{grad } \varphi, & \text{div } \mathfrak{D} &= \varrho \\ \mathfrak{D} &= \mathfrak{E}, & \varrho &= -w'(\varphi) \end{aligned}$$

(der Akzent bedeutet die Ableitung). Gegenüber der gewöhnlichen Elektrostatik im Äther ist hier das Neue, daß die Dichte  $\varrho$  eine universelle Funktion des Potentials, des elektrischen Drucks  $\varphi$  ist. Es ergibt sich als »Poissonsche Gleichung«

$$\Delta \varphi + w'(\varphi) = 0.$$

Eine (im Unendlichen verschwindende) Lösung dieser Gleichung stellt einen möglichen elektrischen Gleichgewichtszustand, ein mögliches für sich existenzfähiges Korpuskel in der Welt dar, die wir jetzt konstruieren. Das Gleichgewicht wird nur dann stabil sein können, wenn die Lösung Kugelsymmetrie hat. In diesem Fall lautet die Gleichung, unter  $r$  den Radius vector verstanden,

$$(68) \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) + w'(\varphi) = 0.$$

Ist  $w$  keine gerade Funktion von  $\varphi$ , so wird mit  $\varphi$  im allgemeinen nicht auch  $-\varphi$  eine Lösung sein; d. h. unter diesen Umständen sind *positive und negative Elektrizität wesensverschieden*. In der Tat wird aber  $w$  keine gerade Funktion sein können, wenn in unserer Welt Materie existieren soll, die sich im Spiel der Kräfte erhält. Denn nur wenn  $w$  nicht gerade ist, hat das Grundgesetz (67) die Konsequenz, daß

$$V\varphi_i \varphi^i = V\varphi^2 - \dot{\varphi}^2$$

oder, was hier auf dasselbe hinauskommt,  $\sqrt{\varphi^2 - \dot{\varphi}^2}$  immer reell bleibt; dies aber muß der Fall sein, wenn ein stabiles Elektron existiert, da alsdann seine Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  ( $\mathfrak{s} = \varphi \mathbf{v}$ ) die Lichtgeschwindigkeit nicht übersteigen kann. So gewährt die Miesche Theorie prinzipiell die Möglichkeit, in Zusammenhang mit der Existenz der Materie die in unserer wirklichen Welt stattfindende Wesensverschiedenheit von positiver und negativer Elektrizität zu verstehen, über die weder die Maxwellsche noch die Elektronentheorie Rechenschaft zu geben vermögen.

Soll (68) eine bei  $r = \infty$  reguläre Lösung

$$(69) \quad -\varphi = \frac{e_0}{r} + \frac{e_1}{r^2} + \dots$$

besitzen, so findet man durch Einsetzen dieser Potenzentwicklung in das erste Glied der Gleichung, daß die Entwicklung von  $w'(\varphi)$  mit der Potenz  $r^{-4}$  oder einer noch höheren negativen beginnt, daß folglich  $w(x)$  für  $x = 0$  mindestens von 5<sup>ter</sup> Ordnung 0 sein muß. Unter dieser Voraussetzung hat aber die Gleichung  $\infty^2$  bei  $r = 0$  und  $\infty^2$  bei  $r = \infty$  reguläre Lösungen. Man wird (als »allgemeinen« Fall) erwarten dürfen, daß diese beiden *eindimensionalen* Lösungsscharen (innerhalb der zweidimensionalen Gesamtschar aller Lösungen) eine endliche oder jedenfalls eine diskrete Anzahl von Lösungen gemein haben. Diese würden die verschiedenen möglichen Korpuskeln (Elektronen und Atomkerne?) darstellen. Es ist freilich nicht *ein* Elektron oder ein Atomkern allein auf der Welt; aber die Abstände zwischen ihnen sind im Vergleich zu ihrer eigenen Ausdehnung doch so groß, daß durch ihre gegenseitige Einwirkung der Feldverlauf im Innern des einzelnen Elektrons oder Atomkerns nicht wesentlich modifiziert wird. Ist  $\varphi$  die ein solches Korpuskel darstellende Lösung (69) von (68), so ist die Gesamtladung desselben

$$= -4\pi \int_0^{\infty} w'(q) r^2 dr = -4\pi \cdot r^2 \frac{dw}{dr} \Big|_{r=\infty} = 4\pi e_0,$$

seine Masse aber berechnet sich als das Integral der Energiedichte  $W$ , die aus (62) hervorgeht:

$$\begin{aligned} \text{Masse} &= 4\pi \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} (\text{grad } q)^2 + w(q) - q w'(q) \right\} r^2 dr \\ &= 4\pi \int_0^{\infty} \left\{ w(q) - \frac{1}{2} q w'(q) \right\} r^2 dr. \end{aligned}$$

Wir können also *aus den Naturgesetzen die Masse und Ladung des Elektrons, die Atomgewichte und Atomladungen der einzelnen existierenden Elemente berechnen*, während wir bisher diese letzten Bausteine der Materie immer als etwas mit seinen numerischen Eigenschaften Gegebenes hingenommen haben. Zwar bleibt das einstweilen nur ein *Programm*, solange wir die Weltfunktion  $L$  nicht kennen; der eben zugrunde gelegte spezielle Ansatz (67) sollte nur dazu dienen, klar zu machen, ein wie tiefes und gründliches, auf Gesetze basiertes Verständnis für die Materie und ihre Konstitution uns die Kenntnis der Wirkungsfunktion eröffnen würde. Im übrigen kann die Diskussion derartiger willkürlich gewählter Ansätze nicht weiter führen, sondern es werden neue physikalische Einsichten und Prinzipien nötig sein, die uns den richtigen Weg zur Bestimmung der Hamiltonschen Funktion weisen.

Die große Erkenntnis, zu der wir in diesem Kapitel gelangt sind, ist die, daß der Schauplatz der Wirklichkeit nicht ein dreidimensionaler Euklidischer Raum ist, sondern *die vierdimensionale Welt, in der Raum und Zeit in unlöslicher Weise miteinander verbunden sind*. So tief die Kluft ist, welche für unser Erleben das anschauliche Wesen von Raum und Zeit trennt — von diesem qualitativen Unterschied geht in jene objektive Welt, welche die Physik aus der unmittelbaren Erfahrung herauszuschälen sich bemüht, nichts ein. Sie ist ein vierdimensionales Kontinuum, weder »Raum« noch »Zeit«; nur das an einem Stück dieser Welt hinwandernde Bewußtsein erlebt den Ausschnitt, welcher ihm entgegenkommt und hinter ihm zurückbleibt, als *Geschichte*, als einen in zeitlicher Entwicklung begriffenen, im Raume sich abspielenden Prozeß.

Diese vierdimensionale Welt ist *metrisch*, wie der Euklidische Raum; aber die quadratische Form, welche die Metrik bestimmt, ist nicht positivdefinit, sondern hat *eine* negative Dimension. Dieser Umstand ist zwar mathematisch belanglos, aber für die Wirklichkeit und ihren Wirkungszusammenhang von tiefer Bedeutung. Es war nötig, den in mathematischer Hinsicht so einfachen Gedanken der metrischen vierdimensionalen Welt nicht nur in isolierter Abstraktion zu erfassen, sondern ihn in seine wichtigsten Konsequenzen für die Auffassung der physikalischen Vorgänge

zu verfolgen, um zu einem lebendigen Verständnis seines Inhalts und seiner Tragweite zu gelangen; das sollte hier in aller Kürze versucht werden. Es bleibt merkwürdig, daß die dreidimensionale Geometrie der statischen Welt, die schon von Euklid in ein vollendetes axiomatisches System gebracht wurde, für uns einen so einleuchtenden Charakter besitzt, während wir uns der vierdimensionalen erst in zähem Ringen und im Anschluß an ein ausgedehntes physikalisch-empirisches Material haben bemächtigen können. Erst mit der Relativitätstheorie ist unsere Naturerkenntnis (darf man sagen) der Tatsache der Bewegung, der Veränderung in der Welt vollständig gerecht geworden.

## Kapitel IV.

### Gravitation.

#### § 26. Relativität der Bewegung, metrisches Feld und Gravitation<sup>1)</sup>.

In so vollendeter Weise auch immer das Einsteinsche Relativitätsprinzip, das wir im vorigen Kapitel entwickelt haben, den aus der Erfahrung gewonnenen, den Wirkungszusammenhang der Welt präzisierenden Naturgesetzen gerecht wird — in erkenntnistheoretischer Hinsicht können wir uns nicht mit ihm zufrieden geben. Greifen wir noch einmal auf den Anfang des letzten Kapitels zurück! Wir lernten damals ein »kinematisches« Relativitätsprinzip kennen.  $x_1, x_2, x_3, t$  waren die Raum-Zeit-Koordinaten eines Weltpunktes, bezogen auf ein bestimmtes dauernd vorhandenes Cartesisches Koordinatensystem im Raum,  $x'_1, x'_2, x'_3, t'$  die Koordinaten desselben Punktes in bezug auf ein zweites solches System, das zu dem ersten in beliebiger Bewegung begriffen sein kann; zwischen ihnen bestehen die Transformationsformeln (II), S. 116. Wir sahen mit voller Evidenz ein, daß zwei physikalische Zustandsverläufe objektiv in keiner Weise voneinander verschieden sind, wenn die Zustandsgrößen für den einen sich durch dieselben mathematischen Funktionen von  $x'_1, x'_2, x'_3, t'$  darstellen, die in den Argumenten  $x_1, x_2, x_3, t$  den andern Verlauf beschreiben. Es müssen also auch die Naturgesetze in dem einen System unabhängiger Raum-Zeit-Argumente genau die gleiche Form besitzen wie in dem andern. Freilich: die Tatsachen der Dynamik scheinen jener Forderung ins Gesicht zu schlagen, und unter dem Zwange dieser Tatsachen hat man sich seit Newton dazu entschließen müssen, nicht der Translation, wohl aber der Rotation eine absolute Bedeutung zuzuschreiben; doch hat die Vernunft dieses ihr durch die Wirklichkeit zugemutete Abstrusum niemals recht verdauen können (trotz aller philosophischen Rechtfertigungsversuche, vgl. z. B. Kants »Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaften«), und das Problem der Zentrifugalkraft ist immer wieder als ungelöstes Rätsel empfunden worden<sup>2)</sup>.

Indem wir aber die in Kap. II dargestellten Riemannschen Ideen, statt auf den dreidimensionalen Euklidischen Raum, auf die vierdimensionale Einstein-Minkowskische Welt, von welcher das vorige Kapitel handelte, anwenden, gelangen wir zu einer überraschenden Lösung, die wir gleichfalls dem Genie Einsteins verdanken. Die Weltpunkte, haben wir danach anzunehmen, bilden eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit, welcher durch eine nicht-ausgeartete quadratische Differentialform  $Q$  von einer positiven und drei negativen Dimensionen\*) eine Maßbestimmung aufgeprägt ist. Bei Benutzung irgendeines Koordinatensystems  $x_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) (im allgemeinen Riemannschen Sinne) sei

$$(1) \quad Q = \sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k.$$

Die Naturgesetze drücken sich jetzt als Tensorrelationen aus, die gegenüber beliebigen stetigen Transformationen der Argumente  $x_i$  invariant sind; dabei treten dann aber neben den übrigen physikalischen Zustandsgrößen die Koeffizienten  $g_{ik}$  der quadratischen Differentialform (1) auf. Der oben aufgestellten Relativitätsforderung wird demnach im Einklang mit den Erfahrungstatsachen Genüge geleistet, wenn wir die  $g_{ik}$  in genau der gleichen Weise wie etwa die Komponenten  $\varphi_i$  des elektromagnetischen Potentials (welche die Koeffizienten einer invarianten linearen Differentialform  $\sum_i \varphi_i dx_i$  bilden) als physikalische Zustandsgrößen betrachten, denen etwas Reales entspricht, das »metrische Feld«. Es besteht unter diesen Umständen sogar Invarianz nicht bloß gegenüber den erwähnten Transformationen (II), die nur in bezug auf die Zeitkoordinate völlig willkürlichen (nicht-linearen) Charakter tragen, sondern gegenüber allen Transformationen überhaupt. Die Auszeichnung der Zeitkoordinate in (II) ist ja in der Tat mit den durch das Einsteinsche Relativitätsprinzip gewonnenen Erkenntnissen unverträglich. Indem wir aber statt (II) ganz beliebige Transformationen zulassen, auch solche, die in den Raumkoordinaten nicht-linear sind, behaupten wir, daß die Cartesischen Koordinatensysteme an sich in keiner Weise vor irgendeinem »krümmelinigen« Koordinatensystem ausgezeichnet sind. Damit fällt die Existenz einer von der Physik unabhängigen Geometrie im alten Sinne, und gerade weil wir uns von dem Dogma der Existenz einer solchen Geometrie noch nicht freigemacht hatten, waren wir durch vernünftige Überlegung auf das Relativitätsprinzip (II) und nicht sofort auf das Prinzip der Invarianz gegenüber

\*) Wir lassen gegenüber dem vorigen Kapitel die Änderung eintreten, daß wir die metrische Fundamentalform mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen. Die frühere Festsetzung war die bequemere zur Darstellung der Zerspaltung der Welt in Raum und Zeit, für die allgemeine Theorie erweist sich die gegenwärtige als die zweckmäßigere. Wir übernehmen die Zeichen  $\varphi_i$ ,  $F_{ik}$ ,  $p^i$ ,  $s^i$ ,  $T^{ik}$  ohne Vorzeichenänderung; dann hat aber z. B.  $p_i$  das entgegengesetzte Vorzeichen wie bisher.

beliebigen Transformationen der vier Weltkoordinaten gekommen. In Wahrheit beruht aber das räumliche Messen auf einem physikalischen Vorgang: der Reaktion der Lichtstrahlen und starren Maßstäbe auf die gesamte Körperwelt. Bereits in § 20 trat uns dieser Gesichtspunkt entgegen, vor allem aber können wir an die Ausführungen von § 12 anknüpfen; denn in der Tat sind wir hier zu Riemanns »dynamischer« Auffassung gelangt als einer notwendigen Konsequenz der Relativität aller Bewegung. Das Verhalten der Lichtstrahlen und Maßstäbe wird außer durch ihre eigene Beschaffenheit bestimmt durch das »metrische Feld«, genau so wie das Verhalten einer elektrischen Ladung außer von dieser selbst von dem elektrischen Feld abhängt. Wie aber das elektrische Feld seinerseits erzeugt wird von den Ladungen und durch seine Vermittlung also eine ponderomotorische Wechselwirkung der Ladungen aufeinander zustande kommt, müssen wir hier annehmen, daß *das metrische Feld* (oder, mathematisch gesprochen, der Tensor mit den Komponenten  $g_{ik}$ ) *erzeugt wird durch das Materielle, welches die Welt erfüllt*. Die im vorigen Kapitel über die Weltmetrik gemachte, der Euklidischen Geometrie im dreidimensionalen Raum entsprechende Annahme, daß es spezielle Koordinatensysteme gibt, die »affinen«, in welchen die metrische Fundamentalform konstante Koeffizienten hat, ist dieser Auffassung gegenüber nicht mehr aufrecht zu erhalten.

Durch ein einfaches anschauliches Beispiel kann man sich klar machen, wie die geometrischen Verhältnisse durch Bewegung in Mitleidenschaft gezogen werden. Man versetze eine ebene Scheibe in gleichförmige Rotation. Ich behaupte, wenn in demjenigen Bezugsraum, relativ zu dem hier von gleichförmiger Rotation gesprochen wird, die Euklidische Geometrie gilt, sie auf der rotierenden Scheibe, wenn diese mittels mitbewegter Maßstäbe ausgemessen wird, nicht mehr gilt. Man betrachte nämlich einen um das Rotationszentrum beschriebenen Kreis auf der Scheibe. Sein Radius hat den gleichen Wert, ob ich ihn mittels ruhender oder mitbewegter Maßstäbe messe; denn die Bewegungsrichtung ist senkrecht zu der Längserstreckung des an den Radius angelegten Maßstabes. Hingegen ergibt sich für die Kreisperipherie mittels der mitbewegten Maßstäbe wegen der Lorentz-Kontraktion, welche sie erfahren, ein größerer Wert. Auf der rotierenden Scheibe gilt somit nicht mehr das Euklidische Gesetz, daß der Umfang des Kreises  $= 2\pi$  mal dem Radius ist.

Wenn in einem Speisewagen, der durch eine scharfe Kurve fährt, die Gläser umfallen, oder ein in Rotation versetztes Schwungrad zerspringt, so haben wir darin nach der hier skizzierten Auffassung nicht, wie nach Newton, die Wirkung einer »absoluten Rotation« zu erblicken, die es nicht gibt, sondern des »metrischen Feldes«. Sofern der Zustand dieses Feldes, das etwas physikalisch Reales ist, nicht beharrt, sondern der gegenwärtige sich aus vergangenen unter dem Einfluß der in der Welt vorhandenen Massen, der Fixsterne, herausgebildet hat, ist jene Erschei-

nung also zum Teil eine Wirkung der Fixsterne, *relativ zu denen* die Rotation stattfindet\*). —

Zur allgemeinen Relativitätstheorie, die wir jetzt aus der im vorigen Kapitel entwickelten »speziellen« mit Einstein herzuleiten im Begriffe sind, erheben wir uns am besten in zwei Stufen.

I. Wir vollziehen, dem Geiste der Kontinuität gemäß, den gleichen Übergang für die vierdimensionale Welt, der uns in Kap. II von der Euklidischen zur Riemannschen Geometrie führte. Dabei tritt eine quadratische Differentialform (1) als metrische Grundform auf. An Stelle der geraden Linie tritt die geodätische, deren Gleichung bei Benutzung eines geeigneten Parameters

$$(2) \quad \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} h \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds} = 0$$

lautet. Der Parameter ist dabei so gewählt, daß

$$g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = \text{konst.}$$

wird. Für die Weltlinie eines sich bewegenden Massenpunktes setzen wir voraus, daß der Ausdruck linker Hand positiv ist; wir können dann ohne Einschränkung der Allgemeinheit die konst. rechts = 1 nehmen.  $s$  ist die Eigenzeit (deren infinitesimaler Zuwachs sich also aus

$$(3) \quad ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k$$

bestimmt),  $\frac{dx_i}{ds} = u^i$  die kontravarianten Komponenten der »Weltrichtung«

des Massenpunktes. Die naturgemäße *Verallgemeinerung des Galileischen Trägheitsprinzips* wird die sein, daß sich ein Massenpunkt, der keiner Einwirkung von außen unterliegt, dem geodätischen Gesetz (2) gemäß bewegt. Aber nicht nur dieses Grundgesetz der Mechanik, sondern auch die physikalischen Gesetze, voran die Maxwellschen Grundgleichungen des veränderlichen elektromagnetischen Feldes gestatten eine unmittelbare Übertragung auf die jetzt vorausgesetzte allgemeine »Riemannsche« Weltgeometrie: wir brauchen nur in den Gesetzen des stationären Magnetfeldes, wie wir sie in Kap. II, § 15 formuliert haben, die Dimensionszahl von 3 auf 4 zu erhöhen, um dieses Ziel zu erreichen. Die so gewonnenen Gleichungen sind invariant gegenüber beliebigen Transformationen der vier Weltkoordinaten. Der in Kap. III behandelte, der Euklidischen

\*) »Zum Teil« darum, weil die Massenverteilung in der Welt das metrische Feld nicht eindeutig bestimmt; sondern beide sind *in einem Moment* unabhängig voneinander und zufällig (genau wie Ladung und elektrisches Feld), die Naturgesetze lehren lediglich, wie sich aus einem solchen Anfangszustand beider alle übrigen (vergangenen und zukünftigen) Zustände zwangsläufig entwickeln. Daß die Welt, wie wir sie tatsächlich vorfinden, im Großen genommen, stationär (in Ruhe) ist, kann, wenn überhaupt, nur als statistisches Gleichgewicht verstanden werden. Vgl. darüber § 33.

Geometrie analoge Fall ist dadurch gekennzeichnet, daß der zu der quadratischen Form (1) gehörige Riemannsche Krümmungstensor  $R_{ij, hk}$  (s. § 16) mit allen seinen Komponenten verschwindet.

Halten wir noch an der Vorstellung einer kontinuierlich ausgebreiteten Materie als einer ursprünglich gegebenen Substanz fest und bedeutet wie früher  $\mu_0$  den Skalar der »Ruh-Massendichte«, so können wir die Gleichungen (2) in der Form schreiben

$$\mu_0 \frac{dw^i}{ds} = - \mu_0 \left\{ \begin{matrix} h & l \\ i & \end{matrix} \right\} w^h w^l.$$

Sie gelten, wenn jede Materiestelle sich unbeeinflusst von den übrigen und von äußeren Kräften bewegt; andernfalls treten auf der rechten Seite die Komponenten  $p^i$  der Dichte der wirkenden Viererkraft hinzu. Es findet Übereinstimmung mit den in § 23 aufgestellten mechanischen Grundgleichungen statt, wenn wir die Größen

$$(4) \quad p^i = - \mu_0 \left\{ \begin{matrix} h & l \\ i & \end{matrix} \right\} w^h w^l$$

als Komponenten der Dichte einer »scheinbaren« Viererkraft einführen, die zu der wirklichen hinzutritt. Die einfachsten Beispiele solcher »Scheinkräfte« sind die Zentrifugal- und Coriolis-Kraft. Vergleichen wir die Formel (4) für die aus dem metrischen Felde entspringende »Scheinkraft« mit der für die ponderomotorische Kraft des elektromagnetischen Feldes\*)

$$p^i = - F_k^i s^k,$$

so zeigt sich eine vollständige Analogie. Wie nämlich der Vektor mit den kontravarianten Komponenten  $s^i$  die Elektrizität charakterisiert, so wird, wie wir gesehen haben, die sich bewegende Materie durch den Tensor mit den kontravarianten Komponenten  $T^{ik} = \mu_0 w^i w^k$  beschrieben. Den Komponenten  $F_k^i$  des elektrischen Feldes entsprechen hier als Komponenten des metrischen Feldes die Größen

$$\Gamma_{hl}^i = \left\{ \begin{matrix} h & l \\ i & \end{matrix} \right\}.$$

Wie die Feldkomponenten  $F$  durch Differentiation aus dem elektromagnetischen Potential  $\varphi_i$  entspringen, so die  $\Gamma$  aus den  $g_{ik}$ ; diese bilden somit das Potential des metrischen Feldes. Die Kraftdichte ist das Produkt aus elektrischem Feld und Elektrizität auf der einen Seite, aus metrischem Feld und Materie auf der andern Seite:

$$p^i = - F_k^i s^k, \quad \text{bzw.} \quad p^i = - \Gamma_{rs}^i T^{rs}.$$

Verlassen wir die Vorstellung einer unabhängig von den physikalischen Zuständen existierenden Materie, so tritt an deren Stelle der durch den

\*) Änderung des Vorzeichens wegen der Änderung des Vorzeichens der metrischen Grundform!

Zustand des Feldes bestimmte allgemeine Energie-Impuls-Tensor  $T_{ik}$ . Nach der speziellen Relativitätstheorie genügt dieser dem Erhaltungssatz

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = 0.$$

Diese Gleichung ist jetzt nach Formel (IV<sub>2</sub>) des § 15 zu ersetzen durch die allgemein invariante

$$(5) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} T^{ik})}{\partial x_k} + \left\{ \begin{matrix} r s \\ i \end{matrix} \right\} T^{rs} = 0,$$

in der  $-g$  die Determinante der  $g_{ik}$  ist. Würde auf der linken Seite nur das erste Glied stehen, so würde auch jetzt der Tensor  $T$  den Erhaltungsgesetzen genügen. Statt dessen kommt aber ein zweiter Term hinzu: die »reale« Gesamtkraft

$$\bar{p}^i = - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} T^{ik})}{\partial x_k}$$

verschwindet nicht, sondern ihr muß durch die aus dem metrischen Felde entspringende »Scheinkraft«

$$p^i = - \Gamma_{rs}^i T^{rs}$$

das Gleichgewicht gehalten werden.

Diese Formeln erweisen sich auch in der speziellen Relativitätstheorie als zweckmäßig, wenn man sich auf ein krummliniges oder krummlinig bewegtes oder beschleunigtes Koordinatensystem zu beziehen hat. Um den schlichten Sinn unserer Ausführungen deutlich zu machen, wollen wir auf diesem Wege die *Zentrifugalkraft* bestimmen, die in einem rotierenden Bezugssystem auftritt. Verwenden wir ein normales Koordinatensystem für die Welt:  $t, x_1, x_2, x_3$ , führen aber an Stelle der Cartesischen Raumkoordinaten Zylinderkoordinaten  $r, z, \theta$  ein, so ist

$$ds^2 = dt^2 - (dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2).$$

Wir machen, unter  $\omega$  eine konstante Winkelgeschwindigkeit verstanden, die Substitution

$$\theta = \theta' + \omega t', \quad t = t'$$

und lassen hernach die Akzente wieder fort; dann kommt

$$ds^2 = dt^2 (1 - r^2 \omega^2) - 2 r^2 \omega d\theta dt - (dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2).$$

Setzen wir einen Augenblick

$$t = x_0, \quad \theta = x_1, \quad z = x_2, \quad r = x_3,$$

so ist für einen in dem jetzt benutzten Bezugssystem ruhenden Massenpunkt  $u^1 = u^2 = u^3 = 0$  und daher

$$(u^0)^2 (1 - r^2 \omega^2) = 1.$$

Um die Komponenten  $p^i$  der auf einen solchen Punkt wirkenden Zentrifugalkraft zu bestimmen, haben wir daher nur die Dreiindizes-Symbole  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ i \end{bmatrix}$  zu bestimmen. Für  $i = 0, 1, 2$  sind sie  $= 0$ ; für  $i = 3$  kommt

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x_3} = -\frac{1}{2} \frac{\partial (1 - r^2 \omega^2)}{\partial r} = r \omega^2.$$

Es ist demnach  $p_0 = p_1 = p_2 = 0$  und

$$p_3 = -\mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 \end{bmatrix} (u^0)^2 = -\frac{\mu_0 r \omega^2}{1 - (r \omega)^2};$$

oder wenn wir zu den gewöhnlichen Maßeinheiten zurückkehren, in denen die Lichtgeschwindigkeit  $c$  nicht  $= 1$  ist, die kontravarianten Komponenten benutzen und statt der Indizes  $0, 1, 2, 3$  die bezeichnenderen  $t, \theta, z, r$ :

$$p^t = p^\theta = p^z = 0, \quad p^r = -\frac{\mu_0 r \omega^2}{1 - \left(\frac{r \omega}{c}\right)^2}.$$

Zwei eng miteinander zusammenhängende Umstände sind für die »Scheinkräfte« des metrischen Feldes charakteristisch. *Erstens*: die Beschleunigung, welche sie einem an einer bestimmten Raum-Zeit-Stelle befindlichen (genauer: diese Stelle mit bestimmter Geschwindigkeit passierenden) Massenpunkt erteilen, ist unabhängig von dessen Masse — oder die Kraft selber ist der trägen Masse des Massenpunktes, an welcher sie angreift, proportional. *Zweitens*: bei Benutzung eines geeigneten, nämlich eines geodätischen Koordinatensystems an einer bestimmten Raum-Zeit-Stelle verschwinden jene Kräfte vollständig (vgl. § 14). Gilt die spezielle Relativitätstheorie, so kann dieses Verschwinden simultan für alle Raum-Zeit-Punkte durch Einführung eines affinen Koordinatensystems erreicht werden, aber auch im allgemeinen Falle können wenigstens für jede einzelne Stelle durch ein zu dieser Stelle gehöriges geeignetes Koordinatensystem die sämtlichen 40 Komponenten  $\Gamma_{hl}^i$  des metrischen Feldes zum Verschwinden gebracht werden\*).

Die erwähnten beiden Umstände treffen nun aber erfahrungsgemäß zu für die *Gravitationskraft*. Darin, daß ein gegebenes Gravitationsfeld jeder Masse, die man in das Feld bringt, die gleiche Beschleunigung erteilt, liegt ja gerade das eigentliche Rätsel der Schwerkraft. Im elektrostatischen Felde wirkt auf ein schwach geladenes Probekörperchen die Kraft  $e \cdot \mathfrak{E}$ , wo die elektrische Ladung  $e$  nur vom Probekörper, die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$  nur vom Felde abhängt. Wirken keine weiteren Kräfte, so erteilt diese Kraft dem Probekörper von der trägen Masse  $m$  eine Be-

\*) Diese Tatsache zeigt ohne weiteres, daß die  $\Gamma_{hl}^i$  nicht die Komponenten eines invarianten Tensors sein können. Es liegt demnach im Wesen des metrischen Feldes, daß es nicht durch einen gegenüber beliebigen Transformationen invarianten Feld-tensor  $\Gamma$  beschrieben werden kann. (Wohl aber haben die  $\Gamma_{hl}^i$  Tensorcharakter gegenüber linearen Transformationen.)

schleunigung  $\mathfrak{b}$ , welche sich durch die Grundgleichung der Mechanik  $m\mathfrak{b} = e\mathfrak{G}$  bestimmt. Im Gravitationsfeld gilt etwas ganz Analoges. Die am Probekörper angreifende Kraft ist  $= g\mathfrak{G}$ , wo  $g$ , die »Gravitationsladung«, nur vom Probekörper,  $\mathfrak{G}$  aber nur vom Felde abhängt; die Beschleunigung bestimmt sich auch hier durch die Gleichung  $m\mathfrak{b} = g\mathfrak{G}$ . Nun stellt sich aber die merkwürdige Tatsache heraus, daß die »Gravitationsladung« oder »schwere Masse«  $g$  gleich der »trägen Masse«  $m$  ist. Von Eötvös ist die empirische Geltung dieses Gesetzes in neuerer Zeit aufs genaueste geprüft worden<sup>3)</sup>. Die einem Körper an der Erdoberfläche durch die Erddrehung erteilte Zentrifugalkraft ist der trägen, sein Gewicht der schweren Masse proportional. Die Resultierende aus beiden, die scheinbare Schwere, würde für verschiedene Körper verschiedene Richtung haben müssen, wenn nicht durchweg Proportionalität zwischen schwerer und träger Masse besteht. Daß eine solche Richtungsverschiedenheit nicht stattfindet, konstatiert Eötvös an dem empfindlichsten Instrument, der Drehwage; es wird dadurch die träge Masse eines Körpers mit derselben Genauigkeit gemessen, mit der wir durch eine Präzisionswage sein Gewicht bestimmen. — Die träge Masse eines Körpers hat nach dem Grundgesetz der Mechanik *universelle* Bedeutung; sie regelt sein Verhalten gegenüber allen auf ihn stattfindenden Kraftwirkungen, welchen physikalischen Ursprungs sie auch sein mögen. Seine schwere Masse ist aber nach der gewöhnlichen Auffassung (wie die elektrische Ladung) auf ein spezielles physikalisches Kraftfeld, das der Gravitation bezogen. Vom Standpunkt einer solchen Auffassung aus muß aber die Identität zwischen träger und schwerer Masse unverständlich bleiben; ihr kann nur eine Mechanik gerecht werden, die von vornherein neben der trägen Masse die Gravitation enthält. Das ist mit der Mechanik des allgemeinen Relativitätsprinzips der Fall, wenn wir annehmen, daß *die Gravitation genau so wie die Zentrifugal- oder Corioliskraft mit in jener »Scheinkraft« drin steckt, die dem metrischen Feld entspringt.* — Die Gravitationskräfte genügen erfahrungsgemäß auch der zweiten Forderung, daß sie an einer Raum-Zeit-Stelle durch Einführung eines geeigneten Koordinatensystems zum Verschwinden gebracht werden können. Ein geschlossener Kasten, ein Lift, dessen Seil gerissen ist und der reibungslos im Schwerfeld der Erde abstürzt, ist ein anschauliches Beispiel eines solchen Bezugssystems. Alle frei fallenden Körper werden in diesem Kasten zu ruhen scheinen, die Vorgänge werden sich trotz der wirkenden Schwerkraft relativ zu dem Kasten genau so abspielen, als wenn der Kasten ruhte und kein Schwerfeld vorhanden wäre.

II. Der unter I. geschilderte Übergang von der speziellen zur allgemeinen Relativitätstheorie ist eine rein mathematische Angelegenheit. Unter Einführung der metrischen Grundform (1) können wir die Naturgesetze so formulieren, daß sie invariant sind gegenüber beliebigen Transformationen; das ist eine mathematische Wesensmöglichkeit, es liegt darin gar keine besondere Eigentümlichkeit dieser Gesetze. Ein neues physikalisches Moment kommt erst durch die Annahme hinein, die Weltmetri-

sei nicht a priori fest gegeben, sondern jene quadratische Grundform werde durch die Materie nach allgemein invarianten Gesetzen bestimmt. Erst dadurch erheben wir uns zu einer Theorie, die den Namen einer allgemeinen Relativitätstheorie wirklich verdient und nicht nur das mathematische Gewand einer solchen erborgt hat. Erst sie ermöglicht es, das Problem der Relativität der Bewegung zu lösen. Erst sie führt jene schon unter I. erwähnte Analogie zu Ende, nach der sich das metrische Feld zur Materie verhält wie das elektrische zur Elektrizität. Und nur wenn wir sie akzeptieren, ist die am Schluß des vorigen Absatzes angedeutete Theorie möglich, nach der die Gravitation eine Äußerungsweise des metrischen Feldes ist; denn wir wissen aus der Erfahrung, daß das Gravitationsfeld sich durch die Massenverteilung (nach dem Newtonschen Attraktionsgesetz) bestimmt. Weniger in der Forderung der allgemeinen Invarianz, sondern in dieser Annahme erblicke ich daher den eigentlichen Kern der allgemeinen Relativitätstheorie. Stellen wir uns auf diesen Standpunkt, so sind wir nicht mehr berechtigt, die aus dem metrischen Feld entspringenden Kräfte als Scheinkräfte zu bezeichnen; sie haben dann eine genau so reale Bedeutung wie die ponderomotorischen Kräfte des elektromagnetischen Feldes. Diesem Umstande Rechnung tragend, wollen wir in Zukunft vom Gravitations- statt vom metrischen Felde sprechen. Auch Coriolis- und Zentrifugalkraft sind reale Kraftwirkungen, die von dem Gravitationsfeld auf die Materie ausgeübt werden. Während sich unter I. die mathematisch leicht zu lösende Aufgabe stellte, die bekannten Naturgesetze (wie die Maxwellschen Gleichungen) von dem speziellen Fall eines konstanten metrischen Fundamentaltensors auf den allgemeinen zu übertragen, haben wir zur Durchführung des jetzt entwickelten Gedankens *das invariante Gravitationsgesetz zu ermitteln, nach welchem die Materie die Komponenten  $\Gamma_{\mu}^i$  des Gravitationsfeldes bestimmt* und das in der Einsteinschen Theorie an die Stelle des Newtonschen Attraktionsgesetzes tritt. Hierfür bieten uns die bekannten Feldgesetze keinen Anhaltspunkt. Trotzdem gelang es Einstein, dies Problem in zwingender Weise zu lösen und zu zeigen, daß sich der Ablauf der Planetenbewegungen aus dem gefundenen Gesetz ebenso gut erklärt wie aus dem alten Newtonschen, ja daß sich die einzige, bisher nicht befriedigend erklärte Unstimmigkeit, welche das Planetensystem gegenüber der Newtonschen Theorie aufweist, ein Vorrücken des Merkur-Perihels um den Betrag von 43" pro Jahrhundert, quantitativ richtig aus seiner Gravitationstheorie ergibt.

So fällt uns durch diese Theorie, die eines der mächtigsten Zeugnisse für die Kraft spekulativen Denkens ist, mit der Lösung des Problems der Relativität aller Bewegung (einer Lösung, die allein imstande ist, unsere Vernunft zu befriedigen) zugleich die Lösung des Rätsels der Schwerkraft als eine reife Frucht mit in den Schoß<sup>4)</sup>. Man sieht, wie bedeutungsvolle Argumente hier, zu den in Kap. II besprochenen hinzutretend, dem Riemann-Einsteinschen Standpunkt der allgemeinen Relativität zum Durchbruch verhelfen. Auch darf man behaupten, daß erst dieser Stand-

punkt dem Umstande völlig gerecht wird, daß Raum und Zeit dem materialen Gehalt der Welt als *Formen* der Erscheinungen gegenüber treten: nur die physikalischen Zustandsgrößen können gemessen, d. h. aus materiellen Geschehnissen abgelesen werden, nicht aber die vier Weltkoordinaten, die vielmehr a priori in willkürlicher Weise den Weltpunkten zugeordnet werden, um die Darstellung der in der Welt ausgebreiteten Zustandsgrößen durch mathematische Funktionen (von vier unabhängigen Variablen) zu ermöglichen.

Während das Potential des elektromagnetischen Feldes von den Koeffizienten einer invarianten *linearen* Differentialform der Weltkoordinaten  $q_i dx_i$  gebildet wird, besteht das Potential des Gravitationsfeldes aus den Koeffizienten einer invarianten *quadratischen* Differentialform. In diese Erkenntnis von grundsätzlicher Bedeutung hat sich in dem Aufstieg, den wir hier vollzogen, allmählich der *Pythagoreische Lehrsatz* verwandelt. Sie kommt uns in der Tat nicht aus der Beobachtung der Gravitationserscheinungen im eigentlichen Sinne (Newton wurde den Beobachtungen durch Einführung eines einzigen Gravitationspotentials gerecht), sondern aus der Geometrie, den Erfahrungen des Messens. Die Einsteinsche Gravitationstheorie entspringt eben durch das Zusammentreten zweier Erkenntnisgebiete, die bis dahin in der historischen Entwicklung völlig getrennt verlaufen waren; wir könnten diese Synthese durch das Schema

Pythagoras    Newton  
Einstein

andeuten.

Um die Werte der Größen  $g_{ik}$  aus unmittelbar beobachtbaren Tatsachen zu entnehmen, genügt im Prinzip allein die Feststellung der Ankunft von Lichtsignalen; die kräftefrei sich bewegenden Massenpunkte, auf die wir uns in der speziellen Relativitätstheorie außerdem noch stützten, können wir hier ganz entbehren. Die Weltpunkte seien irgendwie auf Koordinaten  $x_i$  bezogen. Die durch einen Weltpunkt  $O$  hindurchgehenden geodätischen Linien

$$(6) \quad \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} h & l \\ i & s \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds} = 0; \quad g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = C = \text{konst.}$$

zerfallen in zwei Klassen, diejenigen mit *raumartiger* und die mit *zeitartiger* Richtung ( $C < 0$  bzw.  $C > 0$ ). Die letzteren erfüllen einen »Doppelkegel« mit Knotenpunkt in  $O$ , der von  $O$  aus in zwei einfache Kegel zerfällt, den in die Zukunft und den in die Vergangenheit geöffneten. Der erste enthält alle Weltpunkte, die zur »aktiven Zukunft« von  $O$  gehören, der andere alle Weltpunkte, welche die »passive Vergangenheit« von  $O$  ausmachen. Der begrenzende Kegelmantel wird von den geodätischen Nulllinien ( $C = 0$ ) gebildet; auf seiner »zukünftigen« Hälfte liegen alle Weltpunkte, in denen ein in  $O$  gegebenes Lichtsignal eintrifft, allgemeiner die strengen »Einsatzpunkte« einer jeden in  $O$  ausgelösten Wirkung. Die Koeffizienten der metrischen Fundamentalform

sind somit nicht bloß die Potentiale der Gravitations- und Zentrifugalkwirkungen, sondern *bestimmen allgemein, welche Weltpunkte untereinander in Wirkungszusammenhang stehen*. Vielleicht ist deshalb der Name »Gravitationsfeld« für dasjenige Reale, was durch diese Form dargestellt wird, zu einseitig und würde besser durch »Äther« ersetzt; während dann das elektromagnetische Feld schlechtweg als Feld zu bezeichnen wäre. In der Tat spielt dieser »Äther« die gleiche Rolle wie der Äther der alten Lichttheorie und der »absolute Raum« der Newtonschen Mechanik; nur darf man nicht vergessen, daß er freilich ganz etwas anderes ist als ein substantieller Träger.

Hat  $O$  die Koordinaten  $x_i = 0$ , so lautet die Gleichung des »Lichtkegelmantels« in der unmittelbaren Umgebung von  $O$  bei Beschränkung auf die Glieder 2. Ordnung

$$(7) \quad \sum_{ik} g_{ik} x_i x_k = 0,$$

worin  $g_{ik}$  die Werte dieser Koeffizienten im Punkte  $O$  bedeuten. Indem wir also in den  $O$  unmittelbar benachbarten Punkten das Eintreffen des in  $O$  aufgegebenen Lichtsignals beobachten, ermitteln wir das Verhältnis der  $g_{ik}$  an der Stelle  $O$ . Denken wir uns das für jeden Punkt  $O$  ausgeführt, so sind dadurch die  $g_{ik}$  überall so weit festgelegt, daß, wenn  $g_{ik}$  und  $g_{ik}^*$  zwei den Beobachtungen genügende Wertverläufe dieser Koeffizienten sind,

$$(8) \quad g_{ik}^* = \lambda g_{ik}$$

ist, wo  $\lambda$  eine willkürliche Raum-Zeit-Funktion. Wenn wir aber die Annäherung einen Schritt weiter treiben und auch die Glieder 3. Ordnung berücksichtigen, so erhalten wir aus (6) und  $C = 0$  für den Kegelmantel die Gleichung

$$(9) \quad \sum_{ik} g_{ik} x_i x_k + \sum_{ihl} \left[ \begin{smallmatrix} h & l \\ i \end{smallmatrix} \right] x_i x_h x_l = 0.$$

Indem wir also in der unmittelbaren Umgebung von  $O$  die Lichtausbreitung so genau verfolgen, daß wir auch noch die Abweichung von der durch (7) dargestellten »kugelförmigen« in erster Annäherung ermitteln, erhalten wir die Ausdrücke  $g_{ik}$  und

$$\left[ \begin{smallmatrix} h & l \\ i \end{smallmatrix} \right] + \left[ \begin{smallmatrix} l & i \\ h \end{smallmatrix} \right] + \left[ \begin{smallmatrix} h & i \\ l \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{hl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_h} + \frac{\partial g_{hi}}{\partial x_l} \right\}$$

bis auf einen gemeinsamen Proportionalitätsfaktor. Das ergibt für zwei diesen Messungen Genüge leistende Wertsysteme  $g_{ik}$ ,  $g_{ik}^*$  außer (8) noch die Bedingungen

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} g_{hl} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_h} g_{li} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_l} g_{hi} = 0.$$

Aus diesen aber folgt

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = 0, \quad \lambda = \text{konst.}$$

Da die Gleichungen invariante Form besitzen, können wir, um das zu beweisen, annehmen, daß die  $g_{ik}$  für verschiedene Indizes  $i, k$  gleich 0, für gleiche Indizes  $\neq 0$  sind; dann übersieht man ohne weiteres, daß die behauptete Konsequenz eintritt. Der willkürlich bleibende konstante Proportionalitätsfaktor kann nur durch individuelle Wahl einer Maßeinheit festgelegt werden.

### § 27. Der Energie-Impuls-Tensor.

Ebenso leicht, wie nach einer Bemerkung des vorigen Paragraphen die Maxwellsche, kann die Miesche Elektrodynamik von den Voraussetzungen der speziellen auf die der allgemeinen Relativitätstheorie übertragen werden. Dies ist von Hilbert durchgeführt worden<sup>5)</sup>. In die Weltfunktion  $\mathcal{L}$  gehen außer den Komponenten  $\varphi_i$  des elektromagnetischen Potentials und den Komponenten

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

des Feldes noch die  $g_{ik}$  oder  $g^{ik}$  ein, aber nur diese Größen selber, nicht ihre Ableitungen. Man vergleiche die auf S. 168 aufgezählten vier einfachsten Invarianten, aus denen sich alle andern zusammensetzen: diese sind nicht nur gegenüber linearen, sondern beliebigen Transformationen invariant. Wir setzen, indem wir auch die  $g^{ik}$  variieren,

$$(10) \quad \delta \mathcal{L} = S_{ik} \delta g^{ik} + H^{ik} \delta F_{ik} + 2 s^i \delta \varphi_i,$$

wo  $S_{ik} = S_{ki}$  die Komponenten eines Linientensors 2. Stufe bilden. Dieser, behaupten wir, hängt aufs engste mit dem Energie-Impuls-Tensor zusammen. Indem wir nämlich ausdrücken, daß  $\mathcal{L}$  gegenüber einer infinitesimalen Koordinatentransformation invariant ist, erhalten wir den folgenden Zusammenhang zwischen den  $S_{ik}$  einerseits, dem elektrischen Potential und Feld andererseits:

$$(11) \quad S_i^k = F_{ir} H^{kr} + \varphi_i s^k.$$

Führen wir den Integranden des Wirkungsprinzips  $\mathfrak{L} = \mathcal{L} \sqrt{g}$  ein, so ist also auf Grund der Gleichungen Kap. II, (39) und Kap. III, (64):

$$(12) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \delta \mathfrak{L} = - T_{ik} \delta g^{ik} + H^{ik} \delta F_{ik} + 2 s^i \delta \varphi_i.$$

Für das erste Glied rechts gilt übrigens

$$- T_{ik} \delta g^{ik} = T^{ik} \delta g_{ik}.$$

Um das zu zeigen, hat man sich auf die aus

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

folgende Beziehung

$$g_{ij} \delta g^{jk} = - g^{jk} \delta g_{ij}$$

zu stützen.

Beweis von (11). Es sei zunächst

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

eine beliebige Koordinatentransformation. Es gelten für die Komponenten im ungestrichenen und gestrichenen Koordinatensystem die Gleichungen

$$\varphi_i = \bar{\varphi}_\alpha \frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_i},$$

$$F_{ik} = \bar{F}_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_\beta}{\partial x_k},$$

$$\bar{g}^{ik} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_\beta}.$$

Betrachten wir insbesondere eine infinitesimale Transformation

$$(13) \quad \bar{x}_i = x_i + \delta x_i, \quad \delta x_i = \varepsilon \cdot \xi_i(x_0, x_1, x_2, x_3),$$

in welcher wir den infinitesimalen Parameter  $\varepsilon$  gegen 0 konvergieren lassen, so folgt daraus

$$\delta \varphi_i = -\varepsilon \cdot \varphi_\alpha \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_i},$$

$$\delta F_{ik} = -\varepsilon \left( F_{\alpha k} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_i} + F_{i\beta} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_k} \right),$$

$$(14) \quad \delta g^{ik} = \varepsilon \left( g^{\alpha k} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\alpha} + g^{i\beta} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_\beta} \right).$$

Dabei bedeutet  $\delta \varphi_i$  z. B. das erste Glied der Entwicklung von  $\bar{\varphi}_i(\bar{x}) - \varphi_i(x)$  nach Potenzen von  $\varepsilon$ . Bilden wir für diese Variation  $\delta L$  nach (10), so kommt

$$\delta L = 2\varepsilon \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} (S_{ji} g^{kj} - F_{ir} H^{kr} - \varphi_i s^k).$$

Da wegen der Invarianz von  $L$  die Änderung dieser Größe bei einer Koordinatentransformation = 0 sein muß, ergibt sich die Behauptung. — Damit ist zugleich der in § 25 noch nicht erbrachte Beweis der Symmetrie des Energietensors  $T_{ik}$  in der Mieschen Theorie nachgeholt.

Erst hier erkennen wir, in welcher Weise jener Tensor mit der Hamiltonschen Funktion zusammenhängt. *Unsere Formel (12) lehrt lediglich, daß die durch den Tensor  $T_{ik}$  zu charakterisierende Materie in dem gleichen Verhältnis zum Gravitationsfeld (mit den Potentialen  $g_{ik}$ ) steht wie die Elektrizität (der Vektor  $s_i$ ) zum elektrischen Feld (mit den Potentialen  $\varphi_i$ ); das befindet sich in völligem Einklang mit den Ausführungen des vorigen Paragraphen. Vernünftigerweise haben wir anzunehmen, daß dieser Zusammenhang allgemeine Geltung hat und nicht auf die Miesche Elektrodynamik beschränkt ist. Er besteht in folgendem. Die Hamiltonsche Funktion hängt außer von gewissen Zustandsgrößen  $\varphi$  und deren Ableitungen (1., vielleicht auch höherer Ordnung) ab von den  $g_{ik}$ . Bezeichnet  $\delta$  das totale Differential und  $\delta_0$  jenes partielle Differential, das*

infinitesimaler Variation der Zustandsgrößen  $\varphi$  und ihrer Ableitungen bei ungeänderten  $g_{ik}$  entspricht, so ist

$$(15) \quad \delta \mathfrak{L} = \mathfrak{T}^{ik} \delta g_{ik} + \delta_0 \mathfrak{L} = - \mathfrak{T}^{ik} \delta g^{ik} + \delta_0 \mathfrak{L} \\ (\mathfrak{L} = L \sqrt{g}, \quad \mathfrak{T}^{ik} = T^{ik} \sqrt{g}).$$

In dieser Gleichung erblicken wir die eigentliche *Definition* des Energie-Impuls-Tensors, welche die Symmetrieeigenschaft  $T_{ik} = T_{ki}$  ohne weiteres mit sich führt. Das Gesetz, nach welchem jener Tensor von den Zustandsgrößen des Feldes und den  $g_{ik}$  abhängt, ist daraus *abzuleiten*, indem wie oben ausgedrückt wird, daß  $L$  eine Invariante gegenüber infinitesimalen Koordinatentransformationen ist. In dem besonderen Fall der Mieschen Theorie führt uns dieses Verfahren zu den Formeln Kap. III, (64) zurück, die wir jetzt aus tieferen Gründen begreifen. Erst in der allgemeinen Relativitätstheorie, welche die unabhängige Variation der  $g_{ik}$  ermöglicht, findet der Energie-Impuls-Tensor seine natürliche Erklärung.

Aus ihr ergeben sich auch auf begriffliche Weise, ohne Rechnung, die Erhaltungssätze für Energie und Impuls in voller Allgemeinheit<sup>6)</sup>. Sie besagen nämlich lediglich, daß das Hamiltonsche Prinzip

$$(16) \quad \delta_0 \int L d\omega = 0$$

(die  $g_{ik}$  werden nicht mitvariiert, daher das Zeichen  $\delta_0$ ) insbesondere bei denjenigen unendlichkleinen Variationen erfüllt ist, welche eine infinitesimale Deformation der Welt dadurch hervorruft, daß die Zustandsgrößen von der Deformation mitgenommen werden. Wir fassen ein Weltgebiet  $\mathfrak{G}$  ins Auge, dem bei der Darstellung durch die Koordinaten  $x_i$  ein gewisses mathematisches Gebiet  $\mathfrak{K}$  im Bereich jener Variablen  $x_i$  entspricht. Nehmen wir weiter an, es habe die obige infinitesimale Transformation (13) die Eigenschaft, daß die Variationen  $\xi_i$  am Rande des Gebietes  $\mathfrak{G}$  verschwinden, so entspricht dem Weltgebiet  $\mathfrak{G}$  in den neuen Variablen  $\bar{x}_i$  genau das gleiche mathematische Gebiet  $\mathfrak{K}$ . Zwei Weltpunkte, deren einer in den ursprünglichen Koordinaten durch  $x_i = a_i$  gegeben ist, deren anderer dieselben überstrichenen Koordinaten  $\bar{x}_i = a_i$  besitzt, gehen durch eine infinitesimale Deformation auseinander hervor, die an den Grenzen von  $\mathfrak{G}$  verschwindet und daher das Gebiet  $\mathfrak{G}$  als Ganzes ungeändert läßt. Während wir vorhin die Werte der Koeffizienten  $g^{ik}$  und  $\bar{g}^{ik}$  im alten und neuen Koordinatensystem an *derselben* Stelle miteinander verglichen und ihren Unterschied  $\delta g^{ik}$  ermittelten, vergleichen wir jetzt den Wert von  $g^{ik}$  an einer Stelle mit dem Wert von  $\bar{g}^{ik}$  an der durch die Verschiebung aus ihr hervorgehenden Stelle, bilden also (unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von  $\varepsilon$ ):

$$(17) \quad \delta^* g^{ik} = \bar{g}^{ik}(x) - g^{ik}(x) = \{\bar{g}^{ik}(\bar{x}) - g^{ik}(x)\} - \{\bar{g}^{ik}(\bar{x}) - \bar{g}^{ik}(x)\} \\ = \delta g^{ik} - \varepsilon \cdot \frac{\partial g^{ik}}{\partial x_\alpha} \xi_\alpha.$$

Die gleiche Bedeutung hat  $\delta^*$  für alle übrigen Größen. Schreibe ich kurz  $dx$  für das Integrationselement  $dx_0 dx_1 dx_2 dx_3$ , so ist

$$\int_{\mathfrak{G}} L d\omega = \int_{\mathfrak{K}} \mathfrak{L} dx$$

eine Invariante, daher

$$\int_{\mathfrak{K}} \mathfrak{L}(x) dx = \int_{\mathfrak{K}} \bar{\mathfrak{L}}(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{\mathfrak{K}} \bar{\mathfrak{L}}(x) dx;$$

$$(18) \quad \int_{\mathfrak{K}} \delta^* \mathfrak{L} \cdot dx = 0.$$

Es ist aber

$$(19) \quad \delta^* \mathfrak{L} = - \mathfrak{T}_{ik} \delta^* g^{ik} + \delta_0^* \mathfrak{L}.$$

Wenden wir das Hamiltonsche Prinzip auf die mit  $\delta^*$  bezeichnete infinitesimale Variation an, so kommt

$$(20) \quad \delta_0^* \int \mathfrak{L} dx = 0.$$

Dabei ist folgender Umstand von entscheidender Wichtigkeit (ich knüpfe der Einfachheit halber wieder an die Miesche Theorie an): Wie im ursprünglichen, so gelten auch im überstrichenen Koordinatensystem die Gleichungen

$$\frac{\partial \bar{q}_i(\bar{x})}{\partial \bar{x}_k} - \frac{\partial \bar{q}_k(\bar{x})}{\partial \bar{x}_i} = \bar{F}_{ik}(\bar{x})$$

(denn sie sind invariant), also, da es doch auf die Benennung der Variablen nicht ankommt,

$$\frac{\partial \bar{q}_i(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial \bar{q}_k(x)}{\partial x_i} = \bar{F}_{ik}(x).$$

Für die Variation  $\delta^*$  (hingegen nicht für die oben mit  $\delta$  bezeichnete) ist daher

$$\frac{\partial(\delta^* q_i)}{\partial x_k} - \frac{\partial(\delta^* q_k)}{\partial x_i} = \delta^* F_{ik};$$

dies ist wesentlich für die Gültigkeit von (20). Aus (19) und (20) folgt jetzt

$$\int \mathfrak{T}_{ik} \delta^* g^{ik} dx = 0,$$

und wenn wir aus (17) und (14) den Ausdruck für  $\delta^* g^{ik}$  einsetzen,

$$\int \left\{ \mathfrak{T}_i^k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \mathfrak{T}_{rs} \frac{\partial g^{rs}}{\partial x_i} \xi_i \right\} dx = 0,$$

Formen wir den ersten Term durch partielle Integration um, so kommt

$$\int \left\{ \frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{rs}}{\partial x_i} \mathfrak{T}_{rs} \right\} \xi_i dx = 0,$$

und da diese Gleichung für willkürliche, an den Grenzen verschwindende Verrückungsfunktionen  $\xi_i$  gelten muß:

$$(21) \quad \frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{rs}}{\partial x_i} \mathfrak{T}_{rs} = 0.$$

Um zu erkennen, daß dies in der Tat die Erhaltungssätze für Energie und Impuls sind, müssen wir von der Relation Kap. II, (41) und der Symmetrie von  $T_{rs}$  Gebrauch machen; dann ergibt sich für die durch  $\sqrt{g}$  dividierte linke Seite von (21) der Wert

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} T_i^k)}{\partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} i & r \\ s & \end{matrix} \right\} T_s^r.$$

Wenn wir die aus dem Hamiltonschen Prinzip (16) sich ergebenden Gleichungen als die physikalischen Feldgesetze bezeichnen, so ist damit *allgemein bewiesen, daß das mechanische Grundgesetz der Erhaltung von Energie und Impuls eine mathematische Folge dieser Feldgesetze ist*; ein Resultat, das wir für die Miesche Theorie schon früher durch Rechnung gefunden hatten.

Es ist zu beachten, daß in dem Hamiltonschen Prinzip (16), so wie wir es bis jetzt aufgestellt haben, die  $g_{ik}$  noch eine Sonderrolle spielen, insofern sie nicht mitvariiert werden dürfen. Variation der  $g_{ik}$  wird uns im nächsten Paragraphen die Einsteinschen Gravitationsgesetze ergeben.

## § 28. Einsteins Grundgesetz der Gravitation.

In der Maxwell-Lorentzschen Theorie hängt das Feld  $F$  mit dem erzeugenden Strom  $s$  durch die Differentialgleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} F^{ik})}{\partial x_k} = s^i$$

zusammen. Jetzt handelt es sich darum, das Analogon dieser Gleichungen für das Gravitationsfeld mit den Komponenten  $\left\{ \begin{matrix} r & s \\ i & \end{matrix} \right\}$  zu ermitteln, das durch die materielle Verteilung  $T_{ik}$  erzeugt wird. Nach der Newtonschen Theorie wird der Zustand der Materie durch einen Skalar, die Massendichte  $\mu$ , charakterisiert, und auch das Gravitationspotential ist ein Skalar  $\Phi$ ; es gilt die Poissonsche Gleichung

$$\Delta \Phi = 4\pi k \mu \quad (k \text{ die Gravitationskonstante}).$$

Nach der Relativitätstheorie läßt sich aber die Materie im strengen Sinne nur durch den Energietensor  $T_{ik}$  charakterisieren, und im Einklang damit besteht das Gravitationspotential aus den Komponenten  $g_{ik}$  eines Linientensors 2. Stufe. Wir werden zu erwarten haben, daß die Feldkomponenten  $\left\{ \begin{matrix} r & s \\ i & \end{matrix} \right\}$  inhomogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung genügen, deren rechte Seiten die  $T_{ik}$  bilden; außerdem müssen diese Gleichungen allgemein invarianten Charakter tragen. Es handelt sich also darum, einen Linientensor 2. Stufe zu finden, der aus den  $\left\{ \begin{matrix} r & s \\ i & \end{matrix} \right\}$  selbst und ihren 1. Differentialquotienten aufgebaut ist. Ein solcher ist der Riemannsche

Linientensor Krümmung, den wir in § 16 aufgestellt und mit  $R_{ik}$  bezeichnet haben; siehe namentlich Formel (50) daselbst. Die  $R_{ik}$  sind in den Differentialquotienten der Feldkomponenten  $\left\{ \begin{smallmatrix} r & s \\ i \end{smallmatrix} \right\}$  linear. Somit scheinen sich ganz zwangsläufig die Gravitationsgleichungen

$$(22) \quad R_{ik} = -8\pi\kappa \cdot T_{ik}$$

zu ergeben, in denen  $8\pi\kappa$  eine universelle Konstante bedeutet. Aus der Tatsache, daß gravitierende Massen sich anziehen und nicht abstoßen, werden wir hernach schließen, daß diese Konstante positiv sein muß. Nehmen wir dieses Resultat vorweg, so können wir sie durch rationelle Wahl der Maßeinheit für die Energie  $= 1$  machen. In der Tat hat Einstein, nachdem einmal der Gedanke der allgemeinen Invarianz bei ihm zu vollständigem Durchbruch gekommen war, die Gravitationsgleichungen zunächst in dieser Form angesetzt<sup>7)</sup>. Jedoch müssen sie noch eine leichte Modifikation erfahren, damit sie mit dem Erhaltungssatz von Energie und Impuls in Einklang kommen.

Wir knüpfen dazu an das Hamiltonsche Prinzip an. Es ist kein Zweifel, daß dieses die Gravitationsgesetze ergeben muß, wenn die  $g_{ik}$  variiert werden. Behalten wir aber die Hamiltonsche Funktion  $L$  des vorigen Paragraphen bei, so finden wir dadurch  $T_{ik} = 0$ . Damit Gesetze wie (22) zustande kommen, auf deren rechter Seite die  $T_{ik}$  stehen, auf deren linker Seite aber Ausdrücke auftreten, die durch Differentiation allein aus den  $g_{ik}$  gebildet sind, muß zu jener Hamiltonschen Funktion  $L$  ein Zusatzglied hinzutreten, das ausschließlich aus den  $g_{ik}$  entspringt. Die einfachste, ja sogar die einzige derartige Invariante, welche die Differentialquotienten der  $g_{ik}$  nur bis zur 2. Ordnung enthält, und zwar die Ableitungen 2. Ordnung linear, ist die skalare Krümmung

$$R = g^{ik} R_{ik}.$$

Durch partielle Integration (s. weiter unten) verwandelt sich das über ein beliebiges Weltgebiet erstreckte Integral  $\int R d\omega$  unter Fortlassung eines über die Gebietsgrenze zu erstreckenden Integrals in  $\int H d\omega$ , wo

$$(23) \quad H = g^{ik} \left( \left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ r \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} r & s \\ s \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} i & s \\ r \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} k & r \\ s \end{smallmatrix} \right\} \right).$$

Diese Größe hängt nur von den Potentialen  $g^{ik}$  und den Feldkomponenten  $\left\{ \begin{smallmatrix} r & s \\ i \end{smallmatrix} \right\}$  der Gravitation ab und hat die Eigenschaft, daß sie zwar selbst keine Invariante ist, wohl aber

$$\delta \int H d\omega = \delta \int R d\omega$$

für alle diejenigen infinitesimalen Variationen  $\delta$  des Gravitationsfeldes, die an den Grenzen des beliebigen Weltgebiets  $\mathcal{G}$  verschwinden. Die sogleich durchzuführende Rechnung ergibt für eine derartige Variation

$$\delta \int H d\omega = \int (R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R) \delta g^{ik} \cdot d\omega.$$

Das Hamiltonsche Prinzip wird nun verlangen, daß die Summe

$$\int (L - H) d\omega$$

aus der Wirkung des »Feldes«  $\int L d\omega$  und der Wirkung des »Äthers«  $-\int H d\omega$  für jedes Weltgebiet einen stationären Wert annimmt gegenüber Variationen des Feldes und des Äthers, die an den Grenzen des Gebiets verschwinden. Daher erhalten wir statt (22) die richtigen und endgültigen Gravitationsgleichungen

$$(24) \quad \boxed{R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -T_{ik}}.$$

Die Maßeinheit der Energie ist in rationeller Weise gewählt, und wir haben, wie schon oben erwähnt, das aus der Erfahrung sich ergebende Resultat über das Vorzeichen der Gravitationskonstante vorweg genommen.

Diese Gleichungen stehen in vollständigem Einklang mit dem Energie-Impuls-Gesetz. Bezeichnen wir ihre linke Seite einen Augenblick mit  $R_{ik}$ , so ist nämlich der Erhaltungssatz für diesen Tensor

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} R_i^k)}{\partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} i & r \\ & s \end{matrix} \right\} R_s^r = 0$$

eine mathematische Identität. Wir brauchen, um das einzusehen, die obige Überlegung, welche zu den Erhaltungssätzen für den Energietensor  $T_{ik}$  führte, nur statt auf  $L$  auf  $H$  anzuwenden; daß in  $H$  nicht bloß die  $g_{ik}$ , sondern auch deren Ableitungen auftreten, ist dabei gleichgültig. Das mechanische Grundgesetz der Erhaltung von Energie und Impuls ist demnach ebensowohl eine mathematische Konsequenz der Gravitationsgleichungen (24) wie der physikalischen Feldgesetze<sup>8)</sup>.

An die Stelle der alten Einteilung in Geometrie, Mechanik und Physik tritt in der Einsteinschen Theorie die Gegenüberstellung von Feld und Äther. Die Mechanik aber ist sozusagen die Eliminate aus beiden; denn das Bestehen des Energie-Impuls-Satzes ist einerseits eine Folge der Feldgesetze, andererseits die notwendige Bedingung dafür, daß die Materie gemäß dem Gravitationsgesetz der Welt ihre Maßbestimmung aufprägen kann. In dem System der Feld- und Gravitationsgesetze sind daher vier überschüssige Gleichungen enthalten. In der Tat muß die allgemeine Lösung vier willkürliche Funktionen enthalten<sup>9)</sup>, da die Gleichungen ja zufolge ihrer invarianten Natur das Koordinatensystem der  $x_i$  vollständig unbestimmt lassen und mithin durch willkürliche stetige Transformation dieser Koordinaten aus einer Lösung dieser Gleichungen immer wiederum Lösungen hervorgehen (die aber objektiv denselben Weltverlauf darstellen).

Bevor wir das Gravitationsgesetz (24) weiter diskutieren, mögen die für das Vorhergehende erforderlichen Rechnungen durchgeführt werden. Um durch partielle Integration die 2. Ableitungen der  $g_{ik}$  in dem Weltintegral des Riemannschen Krümmungsskalars  $R$  zu beseitigen, stützen wir uns auf die Beziehungen § 15, (40) und (41). In

$$\frac{1}{V_g} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( V_g \cdot g^{ik} \left\{ \begin{matrix} i r \\ r \end{matrix} \right\} \right) = g^{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} i r \\ r \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i r \\ r \end{matrix} \right\} \frac{1}{V_g} \frac{\partial (g^{ik} V_g)}{\partial x_k}$$

ist danach das letzte Glied

$$= - \left\{ \begin{matrix} i r \\ r \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} r s \\ i \end{matrix} \right\} g^{rs} = - \left\{ \begin{matrix} r s \\ s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} g^{ik},$$

andererseits in

$$\frac{1}{V_g} \frac{\partial}{\partial x_r} \left( V_g \cdot g^{ik} \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} \right) = g^{ik} \frac{\partial}{\partial x_r} \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} \frac{1}{V_g} \frac{\partial (g^{ik} V_g)}{\partial x_r}$$

der zweite Term rechts

$$= \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} \left( -2 g^{is} \left\{ \begin{matrix} s r \\ k \end{matrix} \right\} + g^{ik} \left\{ \begin{matrix} r s \\ s \end{matrix} \right\} \right) = g^{ik} \left( \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} r s \\ s \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} i r \\ s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k s \\ r \end{matrix} \right\} \right).$$

Somit ist bis auf ein über die Begrenzung sich erstreckendes Integral

$$\int g^{ik} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} i r \\ r \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_r} \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} \right) d\omega = 2 \int g^{ik} \left( \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} r s \\ s \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i r \\ s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k s \\ r \end{matrix} \right\} \right) d\omega;$$

$$(d\omega = V_g dx_0 dx_1 dx_2 dx_3)$$

daher, wie an erster Stelle behauptet,

$$\int R d\omega = \int H d\omega.$$

Für die Variation

$$\delta \int H d\omega = \int \delta \mathfrak{H} dx \quad (\mathfrak{H} = H V_g)$$

finden wir

$$\delta \mathfrak{H} = \delta \left( V_g g^{ik} \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} \right) \cdot \left\{ \begin{matrix} r s \\ s \end{matrix} \right\} + \delta \left( V_g g^{ik} \left\{ \begin{matrix} r s \\ s \end{matrix} \right\} \right) \cdot \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} r s \\ s \end{matrix} \right\} \delta (V_g g^{ik})$$

$$- 2 \left\{ \begin{matrix} i r \\ s \end{matrix} \right\} \delta \left( V_g g^{ik} \left\{ \begin{matrix} k s \\ r \end{matrix} \right\} \right) + \left\{ \begin{matrix} i r \\ s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k s \\ r \end{matrix} \right\} \delta (V_g g^{ik}).$$

Das 4. Glied kann geschrieben werden

$$- \left\{ \begin{matrix} i r \\ s \end{matrix} \right\} \delta \left( V_g g^{ik} \left\{ \begin{matrix} k s \\ r \end{matrix} \right\} + V_g g^{rk} \left\{ \begin{matrix} k s \\ i \end{matrix} \right\} \right) = - \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} \delta \left( V_g g^{is} \left\{ \begin{matrix} s r \\ k \end{matrix} \right\} + V_g g^{ks} \left\{ \begin{matrix} s r \\ i \end{matrix} \right\} \right)$$

und vereinigt sich mit dem zweiten zu

$$\left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} \delta \frac{\partial (g^{ik} V_g)}{\partial x_r};$$

das erste aber wird bei geeigneter Abänderung der Indizesbezeichnung

$$= - \left\{ \begin{matrix} i r \\ r \end{matrix} \right\} \delta \frac{\partial (g^{ik} V_g)}{\partial x_k}.$$

Durch Vertauschung von Differentiation und Variation und nachfolgende partielle Integration ergibt sich daher

$$\delta \int H d\omega = \int \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} i r \\ r \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_r} \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i r \\ s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k s \\ r \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} r s \\ s \end{matrix} \right\} \right) \cdot \delta (g^{ik} V_g) \cdot dx$$

$$= \int R_{ik} \delta (g^{ik} V_g) dx = \int (R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R) \delta g^{ik} d\omega.$$

Multiplizieren wir (24) mit  $g^{ik}$  und addieren nach  $i$  und  $k$ , so kommt, wenn  $g^{ik} T_{ik} = T$  gesetzt wird:

$$R - 2R = -R = -T.$$

Jene Gleichungen können daher auch in der Form geschrieben werden:

$$(25) \quad R_{ik} = -\left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T\right).$$

Lassen wir die Maßeinheit für die Energie beliebig, so tritt rechts ein konstanter Faktor  $8\pi\kappa$  hinzu. Man beachte in mathematischer Hinsicht, daß *die exakten Gravitationsgesetze nicht linear sind*; wenn auch linear in den Ableitungen der Feldkomponenten  $\left\{ \begin{smallmatrix} r & s \\ i \end{smallmatrix} \right\}$ , so doch nicht in diesen

selbst. — Nach diesen Gleichungen *wirkt jede Art von Energie gravitierend*; nicht bloß die in den Elektronen und Atomen konzentrierte Energie, die Materie im engeren Sinne, sondern auch die diffuse Feldenergie.

Damit haben wir die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie entwickelt. Jetzt fragt es sich, ob die Erfahrung diese rein spekulativ gewonnene Theorie bestätigt, vor allem, ob die Planetenbewegung aus ihr ebensogut (oder noch besser) wie aus dem Newtonschen Attraktionsgesetz erklärt werden kann.

## § 29. Statisches Gravitationsfeld. Zusammenhang mit der Erfahrung.

Um den Zusammenhang mit den am Planetensystem gewonnenen Erfahrungen herzustellen, spezialisieren wir zunächst die Einsteinschen Gesetze auf den Fall des statischen Gravitationsfeldes<sup>19)</sup>. Dieser ist dadurch charakterisiert, daß bei Benutzung geeigneter Koordinaten die Welt sich in Raum und Zeit zerspaltet, daß also für die metrische Grundform

$$ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2, \quad d\sigma^2 = \sum_{i,k=1}^3 \gamma_{ik} dx_i dx_k$$

gilt:

$$g_{00} = f^2; \quad g_{0i} = g_{i0} = 0; \quad g_{ik} = -\gamma_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3);$$

und daß dabei die auftretenden Koeffizienten  $f, \gamma_{ik}$  nur von den Raumkoordinaten  $x_1 x_2 x_3$ , nicht von der Zeit  $t = x_0$  abhängen.  $d\sigma^2$  ist eine positiv-definite quadratische Differentialform, welche die Metrik des Raumes mit den Koordinaten  $x_1 x_2 x_3$  bestimmt;  $f$  ist offenbar die Lichtgeschwindigkeit. Das Maß  $t$  der Zeit ist (nach Wahl der Zeiteinheit) durch die aufgestellten Forderungen vollständig festgelegt, die Raumkoordinaten  $x_1 x_2 x_3$  hingegen nur bis auf eine beliebige stetige Transformation dieser drei Koordinaten untereinander.

Bezeichnen wir die auf die ternäre Form  $d\sigma^2$  bezüglichen Christoffelschen Dreiindizes-Symbole durch einen angehängten \* und durchlaufen die Indexbuchstaben  $i, k, l$  bloß die Ziffern 1, 2, 3, so folgt aus der Definition leicht:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} i & k \\ l \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} i & k \\ l \end{matrix} \right\}^* ; \\ \left\{ \begin{matrix} i & k \\ o \end{matrix} \right\} &= 0, \quad \left\{ \begin{matrix} o & i \\ k \end{matrix} \right\} = 0, \quad \left\{ \begin{matrix} o & o \\ o \end{matrix} \right\} = 0 ; \\ \left\{ \begin{matrix} i & o \\ o \end{matrix} \right\} &= \frac{f_i}{f}, \quad \left\{ \begin{matrix} o & o \\ i \end{matrix} \right\} = f f^i . \end{aligned}$$

Darin sind  $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$  die kovarianten Komponenten des dreidimensionalen Gradienten,  $f^i = \gamma^{ik} f_k$  die zugehörigen kontravarianten. Setzen wir ferner

$$f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} i & k \\ r \end{matrix} \right\}^* f_r = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} i & k \\ r \end{matrix} \right\}^* \frac{\partial f}{\partial x_r}$$

wo auch der Summationsbuchstabe  $r$  durchläuft nur die drei Ziffern 1, 2, 3) und

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial (\sqrt{\gamma} f^i)}{\partial x_i} = \Delta_2 f,$$

wo  $\gamma$  die Determinante der  $\gamma_{ik}$  ist, so erhalten wir zwischen den Komponenten  $R_{ik}$  und  $P_{ik}$  des verjüngten Krümmungstensors der Form  $ds^2$ , bzw.  $d\sigma^2$  durch eine einfache Rechnung die Beziehungen:

$$\begin{aligned} R_{ik} &= P_{ik} + \frac{f_{ik}}{f}; \\ R_{io} &= R_{oi} = 0; \\ R_{oo} &= -f \cdot \Delta_2 f. \end{aligned}$$

Das statische Gravitationsfeld wird erzeugt von ruhender Materie; diese ist dadurch gekennzeichnet, daß der Energiestrom verschwindet:

$$T_{io} = T_{oi} = 0$$

und  $T_{oo}$  sowie die  $T_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) unabhängig sind von der Zeit. Es ist

$$T = \sum_{i,k=0}^3 g^{ik} T_{ik} = \frac{T_{oo}}{f^2} - T, \quad \text{wo } T = \sum_{i,k=1}^3 \gamma^{ik} T_{ik}.$$

Damit sind wir nun imstande, die Gravitationsgleichungen für das statische Feld hinzuschreiben. Es kommt uns hier nur auf die eine Gleichung an, welche dem Indexpaar  $oo$  entspricht:

$$(26) \quad f \cdot \Delta_2 f = \frac{1}{2} T_{oo} + \frac{1}{2} f^2 T.$$

Für die eigentliche Materie ist allgemein, wenn man auf ihre atomistische Konstitution keine Rücksicht zu nehmen braucht,

$$T_{ik} = \mu_o u_i u_k \quad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

( $\mu_o$  = Ruhmassendichte,  $u_i$  kovariante Komponenten der Geschwindigkeit), insbesondere im Falle der Ruhe und des statischen Gravitationsfeldes ( $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ ):

$$T_{oo} = \mu_o (u_o)^2, \quad T_{ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Da allgemein

$$\sum_{i,k=0}^3 g^{ik} u_i u_k = 1$$

ist, gilt hier

$$\frac{1}{f^2} (u_0)^2 = 1, \quad T_{00} = \mu_0 f^2,$$

und (26) ergibt

$$\frac{A_2 f}{f} = \frac{1}{2} \mu_0$$

oder unter Hinzufügung des konstanten Proportionalitätsfaktors  $8\pi\kappa$ :

$$(27) \quad \frac{A_2 f}{f} = 4\pi\kappa\mu_0.$$

Nehmen wir jetzt an, daß  $ds^2$  (bei geeigneter Wahl der Raumkoordinaten  $x_1 x_2 x_3$ ) unendlich wenig von

$$(28) \quad c^2 dt^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

abweicht — was voraussetzt, daß die das Gravitationsfeld erzeugenden Massen unendlich schwach sind —, so ergibt sich, wenn wir

$$f = c + \frac{\Phi}{c}$$

setzen ( $\Phi$  unendlich klein):

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 4\pi\kappa\mu_0 \quad (\kappa = c^2\kappa),$$

und  $\Phi$  ist gleich dem Newtonschen Potential der mit der Dichte  $\mu_0$  verteilten Massen, wenn wir  $\kappa$  mit der Newtonschen Gravitationskonstante identifizieren. Tatsächlich trifft die hier gemachte Annahme nach allen unsern geometrischen Erfahrungen innerhalb des Planetensystems mit großer Annäherung zu.

Da die Massen der Planeten gegenüber der felderzeugenden, als ruhend zu betrachtenden Sonnenmasse sehr klein sind, können wir jene wie »Probekörper«, die in das Gravitationsfeld der Sonne eingebettet sind, behandeln. Die Bewegung eines jeden von ihnen ist dann (von den gegenseitigen Störungen abgesehen) durch eine geodätische Weltlinie in diesem statischen Gravitationsfeld gegeben. Sie genügt als solche dem Variationsprinzip

$$\delta \int ds = 0,$$

wobei die Enden des betreffenden Weltlinienstücks fest bleiben. Im statischen Falle ergibt sich dafür

$$\delta \int \sqrt{f^2 - v^2} dt = 0,$$

wo

$$v^2 = \left( \frac{d\sigma}{dt} \right)^2 = \sum_{i,k=1}^3 \gamma_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}$$

das Quadrat der Geschwindigkeit ist. Dies ist ein Variationsprinzip von derselben Form wie das der klassischen Mechanik; als »Lagrangesche Funktion« tritt

$$L = \sqrt{f^2 - v^2}$$

auf. Machen wir die gleiche Annäherung wie soeben und bedenken noch, daß bei unendlich schwachem Gravitationsfeld auch die auftretenden Geschwindigkeiten unendlich klein (gegenüber  $c$ ) sein werden, so ist

$$\sqrt{f^2 - v^2} = \sqrt{c^2 + 2\Phi - v^2} = c + \frac{1}{c} \left( \Phi - \frac{1}{2}v^2 \right),$$

und da jetzt

$$v^2 = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 = \sum_i \dot{x}_i^2$$

gesetzt werden darf, ergibt sich

$$\delta \int \left\{ \frac{1}{2} \sum_i \dot{x}_i^2 - \Phi \right\} dt = 0;$$

d. h. der Planet von der Masse  $m$  bewegt sich nach den Gesetzen der klassischen Mechanik, wenn man annimmt, daß eine Kraft mit dem Potential  $m\Phi$  auf ihn einwirkt. *Damit ist der vollständige Anschluß an die Newtonsche Theorie erreicht.* Für die Konstante  $8\pi\kappa$  ergibt sich aus dem bekannten numerischen Wert der Newtonschen Gravitationskonstante  $k$  der Zahlwert

$$8\pi\kappa = \frac{8\pi k}{c^2} = 1,87 \cdot 10^{-27} \text{ cm} \cdot \text{gr}^{-1}.$$

Die Abweichung der metrischen Fundamentalf orm von der »Euklidischen« (28) ist also immerhin so beträchtlich, daß sich die geodätischen Weltlinien in dem Maße, wie die Planetenbewegung es zeigt, von der geradlinig-gleichförmigen Bewegung unterscheiden — obwohl die im Raume gültige, auf  $d\sigma^2$  beruhende Geometrie in den Abmessungen des Planetensystems nur ganz unerheblich von der Euklidischen abweicht (die Winkelsumme in einem geodätischen Dreieck von diesen Abmessungen ist nur sehr wenig von  $180^\circ$  verschieden). Es liegt das vor allem daran, daß der Radius der Erdbahn etwa 8 Lichtminuten beträgt, die Dauer des Erdumlaufs hingegen ein ganzes Jahr! <sup>11)</sup>

Wir wollen die exakte Theorie der Bewegung eines Massenpunktes und der Lichtstrahlen im statischen Gravitationsfeld noch etwas weiter verfolgen. Die geodätischen Weltlinien können nach § 17 durch die beiden Variationsprinzipie

$$(29) \quad \delta \int \sqrt{F} ds = 0 \quad \text{oder} \quad \delta \int F ds = 0, \quad F = g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds}$$

gekennzeichnet werden. Für die »Nulllinien«, die der Bedingung  $F=0$  genügen und das Fortschreiten eines Lichtsignals angeben, kommt nur das zweite in Betracht. Die Variation muß so vorgenommen werden, daß

die Enden des betrachteten Weltlinienstücks ungeändert bleiben. Unterwerfen wir nur  $x_0 = t$  einer Variation, so ist im statischen Fall

$$(30) \quad \delta \int F ds = \left[ 2 f^2 \frac{dx_0}{ds} \delta x_0 \right] - 2 \int \frac{d}{ds} \left( f^2 \frac{dx_0}{ds} \right) dx_0 ds.$$

Also gilt

$$f^2 \frac{dx_0}{ds} = \text{konst.}$$

Bleiben wir zunächst beim Fall des Lichtstrahls stehen, so können wir, indem wir die Maßeinheit des Parameters  $s$  geeignet wählen — bis auf eine willkürliche Maßeinheit ist  $s$  durch das Variationsprinzip selbst normiert —, die rechts auftretende konst. = 1 machen. Nehmen wir jetzt die Variation allgemeiner so vor, daß wir die räumliche Bahnkurve des Strahles unter Festhaltung der Enden abändern, hinsichtlich der Zeit aber die Nebenbedingung, daß für die Enden  $\delta x_0 = 0$  sein soll, fallen lassen, so lautet das Prinzip, wie aus (30) hervorgeht,

$$\delta \int F ds = 2 [\delta t] = 2 \delta \int dt.$$

Wird die variierte Bahn insbesondere gleichfalls wie die ursprüngliche mit Lichtgeschwindigkeit durchlaufen, so gilt auch für die variierte Weltlinie

$$F = 0, \quad d\sigma = f dt,$$

und wir erhalten dann

$$(31) \quad \delta \int dt = \delta \int \frac{d\sigma}{f} = 0.$$

Durch diese Gleichung wird nur die räumliche Lage des Lichtstrahls festgelegt; sie ist nichts anderes als das *Fermatsche Prinzip der kürzesten Ankunft*. In der letzten Formulierung ist die Zeit ganz eliminiert; sie gilt für ein beliebiges Stück der Bahn des Lichtstrahls, wenn dieses im Raum irgendwie unter Festhaltung seiner Enden unendlich wenig verlagert wird.

Benutzt man für ein statisches Gravitationsfeld irgendwelche Raumkoordinaten  $x_1 x_2 x_3$ , so kann man sich zur graphischen Darstellung eines Euklidischen Bildraums bedienen, indem man den Punkt mit den Koordinaten  $x_1 x_2 x_3$  durch einen Bildpunkt mit den Cartesischen Koordinaten  $x_1 x_2 x_3$  zur Darstellung bringt. Trägt man in diesen Bildraum den Ort zweier ruhender Sterne  $S_1, S_2$  und eines ruhenden Beobachters  $B$  ein, so ist der Winkel, unter welchem die Sterne dem Beobachter erscheinen nicht gleich dem Winkel der geraden Verbindungslinien  $BS_1, BS_2$ , sondern man muß  $B$  mit  $S_1, S_2$  durch die aus (31) sich ergebenden gekrümmten Linien kürzester Ankunft verbinden und den Winkel, den diese in  $B$  miteinander bilden, durch eine weitere Hilfskonstruktion vom Euklidischen Maß auf das durch die metrische Grundform  $ds^2$  bestimmte Riemannsche Maß [vgl. § 11, Formel (15)] transformieren. Die so bestimmten Winkel sind es, welche die anschaulich erfaßte Lage der Gestirne zueinander bestimmen, sie sind es, die an dem Teilkreis de

Beobachtungsinstrumentes abgelesen werden. Während  $B$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  unverrückt ihre Stelle im Raum behalten, kann dieser  $\angle S_1 B S_2$  sich ändern, wenn große Massen in die Nähe des Strahlengangs gelangen. In dem erörterten Sinne ist die Behauptung zu verstehen, daß *durch das Gravitationsfeld die Lichtstrahlen gekrümmt werden*. Doch sind die Strahlen nicht, wie wir in § 12 zu vorläufiger Orientierung angenommen hatten, geodätische Linien in dem Raum mit der metrischen Grundform  $d\sigma^2$ , sie machen nicht das Integral  $\int d\sigma$ , sondern das Integral

$$\int \frac{d\sigma}{f}$$

zum Extremum. Die Krümmung der Lichtstrahlen findet insbesondere in dem Gravitationsfeld der Sonne statt. Legen wir der graphischen Darstellung die Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  zugrunde, auf welche sich die soeben hergeleitete, mit der Newtonschen identische Näherungstheorie bezieht, so ergibt die numerische Rechnung für einen unmittelbar an der Sonne vorübergehenden Lichtstrahl eine Ablenkung von  $1,7''$ . Zur empirischen Feststellung dieses Effektes war bei Gelegenheit einer über Rußland totalen Sonnenfinsternis (die Beobachtung des Sternorts von Fixsternen in unmittelbarer Nähe der Sonne ist ja nur bei verfinsteter Sonne möglich) im Sommer 1914 eine Expedition ausgerüstet; aber durch den Ausbruch des Krieges wurde das Unternehmen vereitelt.

Ein anderer, durch die Einsteinsche Gravitationstheorie geforderter optischer Effekt im statischen Feld, der unter günstigen Umständen vielleicht gerade noch der Beobachtung zugänglich ist, beruht auf dem an einer festen Raumstelle zwischen der kosmischen Zeit  $dt$  und der Eigenzeit  $ds$  bestehenden Zusammenhang

$$ds = f dt.$$

Sind zwei ruhende Natriumatome objektiv einander gleich, so muß der Vorgang in ihnen, der zu den optischen Wellen der  $D$ -Linie Anlaß gibt, in beiden die gleiche Frequenz, gemessen in *Eigenzeit*, besitzen. Zwischen den Frequenzen  $\tau_1, \tau_2$  in kosmischer Zeit besteht daher, wenn  $f$  an den betreffenden Stellen, an denen sich die Atome befinden, die Werte  $f_1, f_2$  hat, der Zusammenhang

$$f_1 \tau_1 = f_2 \tau_2; \quad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{f_2}{f_1}.$$

Die von einem Atom ausgehenden Lichtwellen haben aber natürlich in dem ganzen Raum, in *kosmischer* Zeit gemessen, überall die gleiche Frequenz. Indem man also das Licht der Natrium- $D$ -Linie, das von einem Stern großer Masse herkommt, mit dem von einer irdischen ausgesandten in demselben Spektroskop vergleicht, muß jene Linie gegenüber dieser eine kleine Verschiebung nach dem Rot hin zeigen, da  $f$  in der Nähe großer Massen einen etwas kleineren Wert besitzt als fern von ihnen. Die Größe der zu erwartenden Abweichung liegt an der Grenze des

Beobachtbaren; es kommt die Vermischung mit dem Dopplereffekt hinzu. Die bisherigen Experimente haben noch kein eindeutiges Resultat ergeben.

Eine dritte Möglichkeit der Kontrolle durch die Erfahrung ist diese. Nach Einstein ist die Newtonsche Planetentheorie nur eine erste Annäherung; es fragt sich, ob die Abweichungen der strengen Einsteinschen Theorie von dieser groß genug sind, um einen mit unsern heutigen Hilfsmitteln wahrnehmbaren Einfluß hervorzubringen. Offenbar werden in dieser Hinsicht die Chancen für den sonnennächsten Planeten, den Merkur, am günstigsten liegen. In der Tat hat Einstein <sup>12)</sup>, indem er die Approximation einen Schritt weiter fortsetzte, und Schwarzschild <sup>13)</sup>, indem er in aller Strenge das von einer ruhenden Masse erzeugte kugelsymmetrische Gravitationsfeld und die Bahnkurve eines Massenpunktes von unendlichkleiner Masse in diesem Felde bestimmte, gefunden, daß die *Bahnellipse des Merkur* (außer den von den übrigen Planeten hervorgebrachten Störungen) *in Richtung der Bahnbewegung eine langsame Drehung erfahren muß, welche pro Jahrhundert 43" ausmacht*. Seit Leverrier ist ein Betrag genau von dieser Größe in den säkularen Störungen des Merkurperihels bekannt, der durch die Störungstheorie nicht erklärt werden konnte; es wurden die mannigfachsten Hypothesen ersonnen, um diese Diskrepanz zwischen Theorie und Beobachtung zu beseitigen <sup>14)</sup>. — Auf die von Schwarzschild angegebene strenge Lösung kommen wir im nächsten Paragraphen zurück.

So ist denn der Perihelvorgang des Merkur bisher die einzige empirische Bestätigung der Einsteinschen Gravitationstheorie; es steht also mit ihrer experimentellen Prüfung zur Zeit noch erheblich schlechter als mit der speziellen Relativitätstheorie. So radikal die Umwälzung ist, welche die Gravitationstheorie für unsere Vorstellungen von Raum und Zeit bedeutet, so winzig sind die tatsächlichen Abweichungen, welche sie für die beobachtbaren Erscheinungen mit sich bringt. Aber jedenfalls liefert sie ebensoviel und (hinsichtlich des Merkur) noch etwas mehr als die Newtonsche Theorie. Ihre eigentliche Stütze findet sie aber weniger in der Erfahrung als in ihrer eigenen inneren Folgerichtigkeit, durch welche sie der klassischen Mechanik ganz erheblich überlegen ist, und darin, daß sie in einer die Vernunft aufs höchste befriedigenden Weise das Rätsel der Relativität der Bewegung und der Gravitation auf einen Schlag löst.

Nach der gleichen Methode wie für den Lichtstrahl können wir auch für die Bewegung eines Massenpunktes im statischen Gravitationsfeld ein nur die räumliche Bahnkurve betreffendes Minimalprinzip, das dem Fermatschen der kürzesten Ankunft entspricht, aufstellen. Ist der Parameter  $s$  die Eigenzeit, so wird

$$(32) \quad F = 1, \quad \text{und} \quad f^2 \frac{dt}{ds} = \text{konst.} = \frac{1}{E}$$

ist das Energieintegral. Jetzt benutzen wir das erste der beiden Variationsprinzipie (29) und verallgemeinern es wie oben in der Weise, daß wir die

räumliche Bahnkurve unter Festhaltung ihrer Enden,  $x_0 = t$  aber ganz beliebig variieren. Es lautet dann

$$(33) \quad \delta \int \sqrt{F} ds = \left[ \frac{1}{E} \delta t \right] = \delta \int \frac{dt}{E}.$$

Um die Eigenzeit zu eliminieren, dividieren wir die erste der Gleichungen (32) durch die ins Quadrat erhobene zweite; es kommt

$$(34) \quad \frac{1}{f^4} \left\{ f^2 - \left( \frac{d\sigma}{dt} \right)^2 \right\} = E^2, \quad d\sigma = f^2 \sqrt{U} dt,$$

wo

$$U = \frac{1}{f^2} - E^2.$$

(34) liefert das Geschwindigkeitsgesetz, nach welchem der Massenpunkt seine Bahn durchmißt. Variieren wir insbesondere so, daß auch die variierte Bahnkurve nach dem gleichen Gesetz mit der gleichen Konstante  $E$  durchlaufen wird, so folgt aus (33):

$$\delta \int \frac{dt}{E} = \delta \int \sqrt{f^2 - \left( \frac{d\sigma}{dt} \right)^2} dt = \delta \int E f^2 dt, \quad \text{d. i.} \\ \delta \int f^2 U dt = 0$$

oder schließlich, indem wir  $dt$  durch das räumliche Bogenelement  $d\sigma$  ausdrücken und so die Zeit ganz eliminieren:

$$(35) \quad \delta \int \sqrt{U} d\sigma = 0.$$

Nachdem hieraus die Bahnkurve des Massenpunktes ermittelt ist, ergibt sich der zeitliche Ablauf der in dieser Bahnkurve vonstatten gehenden Bewegung aus (34):

$$dt = \frac{d\sigma}{f^2 \sqrt{U}}.$$

Für  $E = 0$  kommen wir auf die Gesetze des Lichtstrahls zurück.

### § 30. Strenge Lösung des Einkörperproblems<sup>15)</sup>.

Für ein statisches Gravitationsfeld ist

$$ds^2 = f^2 dx_0^2 - d\sigma^2,$$

wo  $d\sigma^2$  eine positiv-definite quadratische Form der drei Raumvariablen  $x_1, x_2, x_3$  ist; die Lichtgeschwindigkeit  $f$  hängt gleichfalls nur von diesen ab. Das Feld ist *kugelsymmetrisch*, wenn bei geeigneter Wahl der Raumkoordinaten  $f$  und  $d\sigma^2$  invariant sind gegenüber linearer orthogonaler Transformation derselben. Damit dies der Fall ist, muß  $f$  eine Funktion der Entfernung

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

vom Zentrum sein,  $d\sigma^2$  aber besitzt notwendig die Gestalt

$$(36) \quad \lambda (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + l (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2,$$

worin  $\lambda$  und  $l$  gleichfalls Funktionen von  $r$  allein bedeuten. Ohne daß diese Normalform zerstört wird, kann man die Raumkoordinaten noch einer Transformation unterwerfen, die darin besteht, daß man  $x_1, x_2, x_3$  ersetzt durch  $\mu x_1, \mu x_2, \mu x_3$  mit einem Proportionalitätsfaktor  $\mu$ , der eine willkürliche Funktion der Entfernung  $r$  ist. Indem man über ihn geeignet verfügt, kann man offenbar erreichen, daß  $\lambda = 1$  wird; dies sei geschehen. Wir haben dann also mit den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen

$$\gamma_{ik} = -g_{ik} = \delta_i^k + l \cdot x_i x_k \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Wir wollen jetzt dieses kugelsymmetrische Feld so bestimmen, daß es den homogenen Gravitationsgleichungen genügt, welche dort gelten, wo keine Materie vorhanden ist, d. h. wo der Energie-Impuls-Tensor  $T_{ik}$  verschwindet. Jene Gleichungen sind zusammengefaßt in dem Variationsprinzip

$$\delta \int H d\omega = 0.$$

Das Gravitationsfeld, das wir finden, ist das von ruhenden Massen erzeugte, die kugelsymmetrisch um ein Zentrum verteilt sind. Bedeutet der Akzent Ableitung nach  $r$ , so bekommen wir

$$\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_\alpha} = l' \frac{x_\alpha}{r} x_i x_k + l (\delta_i^\alpha x_k + \delta_k^\alpha x_i)$$

und daher

$$-\left[ \begin{matrix} i & k \\ \alpha \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{x_\alpha}{r} l' x_i x_k + l \delta_i^k x_\alpha \quad (i, k, \alpha = 1, 2, 3).$$

Da aus

$$x_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 \gamma_{\alpha\beta} \xi_\beta,$$

wie man sich durch Einsetzen überzeugt,

$$\xi_\alpha = \frac{1}{h^2} x_\alpha, \quad h^2 = 1 + l r^2$$

folgt, ist mithin

$$\left\{ \begin{matrix} i & k \\ \alpha \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \frac{x_\alpha}{r} \frac{l' x_i x_k + 2 l r \delta_i^k}{h^2}.$$

Es genügt, die Berechnung von  $H$  für den Punkt  $x_1 = r, x_2 = 0, x_3 = 0$  durchzuführen. An dieser Stelle sind von den eben berechneten Dreiindizes-Symbolen

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{h'}{h}, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 & 3 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{l r}{h^2},$$

alle übrigen  $= 0$ . Von den 0 enthaltenden Dreiindizes-Symbolen sind nach dem vorigen Paragraphen

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{f'}{f}, \quad \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{f f'}{h^2},$$

alle andern  $= 0$ . Von den  $g_{ik}$  sind die in der Hauptdiagonale stehenden ( $i = k$ ) gleich

$$f^2, -h^2, -1, -1,$$

die seitlichen ( $i \neq k$ ) sind 0; für die in der Hauptdiagonale stehenden  $g^{ik}$  findet man daher die Werte

$$\frac{1}{f^2}, -\frac{1}{h^2}, -1, -1,$$

für die seitlichen 0. Die Definition (23) von  $H$  liefert daher hier:

$$H = \begin{array}{l} \frac{1}{f^2} \left\{ \begin{array}{c} 00 \\ 1 \end{array} \right\} \left( \left\{ \begin{array}{c} 10 \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 11 \\ 1 \end{array} \right\} \right) - 2 \left\{ \begin{array}{c} 01 \\ 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 00 \\ 1 \end{array} \right\} \\ -\frac{1}{h^2} \left\{ \begin{array}{c} 11 \\ 1 \end{array} \right\} \left( \left\{ \begin{array}{c} 10 \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 11 \\ 1 \end{array} \right\} \right) - \left\{ \begin{array}{c} 10 \\ 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 10 \\ 0 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} 11 \\ 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 11 \\ 1 \end{array} \right\} \\ -1 \left\{ \begin{array}{c} 22 \\ 1 \end{array} \right\} \left( \left\{ \begin{array}{c} 10 \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 11 \\ 1 \end{array} \right\} \right) \\ -1 \left\{ \begin{array}{c} 33 \\ 1 \end{array} \right\} \left( \left\{ \begin{array}{c} 10 \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 11 \\ 1 \end{array} \right\} \right). \end{array}$$

Die in der ersten und zweiten Zeile stehenden Glieder ergeben zusammen

$$\left( \left\{ \begin{array}{c} 11 \\ 1 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} 10 \\ 0 \end{array} \right\} \right) \left( \frac{1}{f^2} \left\{ \begin{array}{c} 00 \\ 1 \end{array} \right\} - \frac{1}{h^2} \left\{ \begin{array}{c} 10 \\ 0 \end{array} \right\} \right);$$

in diesem Produkt ist aber der zweite Faktor  $= 0$ . Da

$$\sum_{i=0}^3 \left\{ \begin{array}{c} 1i \\ i \end{array} \right\} = \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} \quad (\mathcal{A} = \sqrt{g} = hf),$$

ist die Summe der in der dritten und vierten Zeile stehenden Terme

$$= -\frac{2lr}{h^2} \cdot \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}}.$$

Erstrecken wir das Weltintegral von  $H$  nach der Zeit  $x_0$  über ein festes Intervall, nach dem Raum über eine von zwei Kugelflächen begrenzte Schale, so lautet, da

$$d\omega = \mathcal{A} dx_0 d\Omega r^2 dr \quad (d\Omega = \text{räumlicher Winkel})$$

ist, die zu lösende Variationsgleichung

$$\delta \int H \mathcal{A} r^2 dr = 0;$$

also, wenn wir

$$-\frac{lr^3}{h^2} = -\frac{lr^3}{1+lr^2} = \left( \frac{1}{h^2} - 1 \right) r = w$$

setzen,

$$\delta \int w \mathcal{A}' dr = 0.$$

Darin dürfen wir  $\mathcal{A}$  und  $w$  als die unabhängig zu variierenden Funktionen betrachten.

Indem wir  $w$  variieren, ergibt sich

$$A' = 0, \quad A = \text{konst.};$$

bei geeigneter Wahl der Maßeinheit der Zeit also

$$A = hf = 1.$$

Partielle Integration liefert

$$\int w A' dr = [w A] - \int A w' dr.$$

Daher kommt, wenn wir  $A$  variieren,

$$w' = 0, \quad w = \text{konst.} = -2m.$$

Aus der Definition von  $w$  und  $A = 1$  folgt nunmehr

$$f^2 = 1 - \frac{2m}{r}, \quad h^2 = \frac{1}{f^2}.$$

Unsere Aufgabe ist damit vollständig gelöst. Die Maßeinheit der Zeit ist so gewählt, daß die Lichtgeschwindigkeit im gravitationslosen Raum  $= 1$  ist. Bedeutet  $m_0$  die felderzeugende Masse in gr, so ist die Konstante  $m$  von der Dimension einer Länge  $= \kappa m_0$ ; wir nennen sie den *Gravitationsradius der Masse*. Denn in unendlicher Entfernung weicht die ermittelte metrische Fundamentalform  $ds^2$  unendlich wenig von

$$dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

ab, und es muß daher nach der obigen Näherungsrechnung  $f = 1 + \Phi$  sein, wo  $\Phi$  das Newtonsche Potential der felderzeugenden Masse ist. Da  $f^2$  nicht negativ werden kann, zeigt sich übrigens, daß bei Verwendung der hier eingeführten Koordinaten für das von Materie freie Raumgebiet überall  $r > 2m$  sein muß. Weitere Aufklärung darüber gibt der in § 31 durchzuführende besondere Fall der Flüssigkeitskugel, wo wir das Gravitationsfeld auch innerhalb der Masse bestimmen werden. Die gefundene Lösung dürfen wir für das Schwerfeld der Sonne außerhalb derselben benutzen, wenn wir die Einwirkung der Planeten und der fernen Fixsterne vernachlässigen.

Die Bewegung eines Planeten (dessen Masse wir unendlichklein gegenüber der Sonnenmasse annehmen) wird durch eine geodätische Weltlinie dargestellt. Von deren vier Gleichungen

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} h \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_i}{ds} = 0$$

liefert die dem Index  $i = 0$  entsprechende im statischen Gravitationsfeld, wie wir oben sahen, das Energieintegral

$$f^2 \frac{dx_0}{ds} = \text{konst.}$$

oder da

$$\left( f \frac{dx_0}{ds} \right)^2 = 1 + \left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2;$$

$$f^2 \left[ 1 + \left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2 \right] = \text{konst.}$$

Die den Indizes  $i = 1, 2, 3$  entsprechenden Gleichungen liefern für ein kugelsymmetrisches Feld, wie die hingeschriebenen Werte der Dreiindizes-Symbole ohne weiteres erkennen lassen, die Proportion

$$\frac{d^2 x_1}{ds^2} : \frac{d^2 x_2}{ds^2} : \frac{d^2 x_3}{ds^2} = x_1 : x_2 : x_3$$

und daraus in bekannter Weise die drei Gleichungen, welche den Flächensatz enthalten:

$$\dots\dots\dots, \quad x_1 \frac{dx_2}{ds} - x_2 \frac{dx_1}{ds} = \text{konst.}$$

Gegenüber der Newtonschen Theorie besteht hinsichtlich dieses Satzes nur der Unterschied, daß nicht nach der kosmischen Zeit, sondern der Eigenzeit  $s$  des Planeten differenziert werden muß. Wegen des Flächensatzes erfolgt die Bewegung in einer Ebene, die wir zur Koordinatenebene  $x_3 = 0$  wählen können. Führen wir in ihr Polarkoordinaten ein:

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi,$$

so lautet das Flächenintegral

$$(37) \quad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \text{konst.} = b.$$

Für das Energieintegral aber kommt, da

$$\begin{aligned} dx_1^2 + dx_2^2 &= dr^2 + r^2 d\varphi^2, & x_1 dx_1 + x_2 dx_2 &= r dr, \\ d\sigma^2 &= (dr^2 + r^2 d\varphi^2) + l(r dr)^2 = h^2 dr^2 + r^2 d\varphi^2 \text{ ist:} \\ f^2 \left\{ 1 + h^2 \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right\} &= \text{konst.} \end{aligned}$$

Da  $fh = 1$  ist, folgt durch Einsetzen des Wertes von  $f^2$

$$(38) \quad -\frac{2m}{r} + \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + r(r - 2m) \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = -E = \text{konst.}$$

Diese Gleichung zeigt gegenüber der Energiegleichung in der Newtonschen Theorie nur den einen Unterschied, daß im letzten Gliede links der eine Faktor  $r$  durch  $r - 2m$  ersetzt ist.

Die weitere Behandlung geschieht genau wie in der Newtonschen Theorie. Wir setzen  $\frac{d\varphi}{ds}$  aus (37) in (38) ein:

$$\left( \frac{dr}{ds} \right)^2 = \frac{2m}{r} - E - \frac{b^2(r - 2m)}{r^3},$$

oder statt  $r$  die reziproke Entfernung  $\varrho = \frac{1}{r}$  benutzend,

$$\left( \frac{d\varrho}{ds} \right)^2 = 2m\varrho - E - b^2\varrho^2(1 - 2m\varrho).$$

Wollen wir die Planetenbahn ermitteln, so eliminieren wir die Eigenzeit, indem wir diese Gleichung durch die quadrierte Gleichung (37) dividieren:

$$\left( \frac{d\varrho}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2m}{b^2}\varrho - \frac{E}{b^2} - \varrho^2 + 2m\varrho^3.$$

In der Newtonschen Theorie fehlt das letzte Glied rechts. Für die numerischen Verhältnisse, die bei einem Planeten vorliegen, hat das Polynom 3. Grades in  $q$  auf der rechten Seite drei positive Wurzeln  $q_0 > q_1 > q_2$  und ist also

$$= 2m(q_0 - q)(q_1 - q)(q - q_2);$$

$q$  bewegt sich zwischen  $q_1$  und  $q_2$ . Die Wurzel  $q_0$  ist sehr groß gegenüber den beiden andern. Wir setzen wie in der Newtonschen Theorie

$$\frac{1}{q_1} = a(1 - e), \quad \frac{1}{q_2} = a(1 + e)$$

und nennen  $a$  die halbe große Achse und  $e$  die Exzentrizität; dann ist

$$q_1 + q_2 = \frac{2}{a(1 - e^2)}.$$

Vergleichen wir die Koeffizienten von  $q^2$  miteinander, so kommt

$$q_0 + q_1 + q_2 = \frac{1}{2m}.$$

$q$  drückt sich durch  $\varphi$  mittels eines elliptischen Integrals 1. Gattung aus, daher ist  $q$  umgekehrt eine elliptische Funktion von  $\varphi$ . Die Bewegung hat genau den gleichen Typus wie die des sphärischen Pendels. Um einfache Näherungsformeln zu finden, machen wir die gleiche Substitution, wie sie zur Bestimmung der Keplerschen Bahnellipse in der Newtonschen Theorie benutzt wird:

$$q - \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{q_1 - q_2}{2} \cos \theta.$$

Dann ist

$$\varphi = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2m\left(q_0 - \frac{q_1 + q_2}{2} - \frac{q_1 - q_2}{2} \cos \theta\right)}}.$$

Das Perihel ist charakterisiert durch die Werte  $\theta = 0, 2\pi, \dots$ ; der Zuwachs des Azimuts  $\varphi$  für einen vollen Umlauf von Perihel zu Perihel wird also durch das obige Integral, genommen in den Grenzen von 0 bis  $2\pi$ , geliefert. Mit bei weitem ausreichender Genauigkeit ist er

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{2m\left(q_0 - \frac{q_1 + q_2}{2}\right)}}.$$

Wir finden aber

$$q_0 - \frac{q_1 + q_2}{2} = (q_0 + q_1 + q_2) - \frac{3}{2}(q_1 + q_2) = \frac{1}{2m} - \frac{3}{a(1 - e^2)}.$$

Infolgedessen ist jener Zuwachs

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{6m}{a(1 - e^2)}}} \sim 2\pi \left\{ 1 + \frac{3m}{a(1 - e^2)} \right\}$$

und das Vorrücken des Perihels pro Bahnumlauf

$$= \frac{6\pi m}{a(1-e^2)}.$$

$m$ , der Gravitationsradius der Sonne, kann nach dem dritten Keplerschen Gesetz noch durch die Umlaufzeit  $T$  des Planeten und die halbe große Achse  $a$  ausgedrückt werden:

$$m = \frac{4\pi^2 a^3}{c^2 T^2}.$$

Einen mit den feinen astronomischen Beobachtungsmitteln sicher konstatierbaren Betrag erreicht dieses Vorrücken des Perihels nur für den sonnennächsten Planeten, den Merkur (s. oben).<sup>16)</sup>

### § 31. Weitere strenge Lösungen des statischen Gravitationsproblems.

In einem Euklidischen Raum mit den Cartesischen Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  lautet die Gleichung einer Rotationsfläche, welche die  $x_3$ -Achse zur Drehachse hat,

$$x_3 = F(r), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2};$$

auf ihr ist also das Quadrat des Abstandes  $d\sigma$  zweier unendlich benachbarter Punkte

$$d\sigma^2 = (dx_1^2 + dx_2^2) + (F'(r))^2 dr^2 = (dx_1^2 + dx_2^2) + \left(\frac{F'(r)}{r}\right)^2 (x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2.$$

Im kugelsymmetrischen statischen Gravitationsfeld ist auf einer durch das Zentrum gehenden Ebene ( $x_3 = 0$ )

$$d\sigma^2 = (dx_1^2 + dx_2^2) + l(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2,$$

wo

$$l = \frac{h^2 - 1}{r^2} = \frac{2m}{r^2(r - 2m)}.$$

Die beiden Formeln kommen zur Übereinstimmung, wenn man

$$F'(r) = \sqrt{\frac{2m}{r - 2m}}, \quad F(r) = \sqrt{8m(r - 2m)}$$

setzt. Die Geometrie in jener Ebene ist also die gleiche, wie sie im Euklidischen Raum auf dem einschaligen Rotationsparaboloid

$$z = \sqrt{8m(r - 2m)}$$

gilt.<sup>17)</sup> Die orthogonale Projektion des Paraboloids auf die  $x_1, x_2$ -Ebene bedeckt das Äußere des Kreises  $r > 2m$  doppelt, das Innere hingegen überhaupt nicht. Bei natürlicher analytischer Fortsetzung haben wir unsere kugelsymmetrische Lösung des Gravitationsproblems also folgendermaßen zu interpretieren: Der wirkliche Raum ist in der Weise auf den Euklidischen Bildraum mit den Cartesischen Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  abgebildet, daß die Abbildung das Äußere der Kugel  $r = 2m$  doppelt über-

zieht. Durch jene Kugel, auf welcher die Maßbestimmung singular wird, ist der Raum in zwei Hälften geschieden, deren eine man als das Äußere, deren andere man als das Innere des »Massenpunktes« zu bezeichnen hätte, um dessen Feld es sich handelt. Masse befindet sich aber weder im Äußern noch im Innern, sondern nur auf der Oberfläche der singulären Kugel. Die volle Realisierung dieser Lösung würde voraussetzen, daß der Raum andere Zusammenhangsverhältnisse aufweist, als wir sie ihm gemeinhin zuschreiben; er müßte nämlich zweifach zusammenhängend sein, d. h. nicht nur *einen*, sondern *zwei* ins Unendliche hinausreichende Säume tragen. Auf die wichtige Frage des Raumzusammenhangs im ganzen, der Analysis situs, kommen wir hernach noch genauer zu sprechen. Bleibt man bei der Auffassung des einfach zusammenhängenden Raumes stehen, so kann von der eben gekennzeichneten Lösung in der Natur immer nur ein Stück realisiert sein.

Vielleicht werden die Verhältnisse noch übersichtlicher, wenn wir unter Wahrung der Kugelsymmetrie auf ein anderes Koordinatensystem transformieren. Wenn die neuen Koordinaten durch Akzente bezeichnet werden, so sollen die Transformationsformeln lauten

$$x'_1 = \frac{r'}{r} x_1, \quad x'_2 = \frac{r'}{r} x_2, \quad x'_3 = \frac{r'}{r} x_3; \quad r = \left(r' + \frac{m}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{r'}.$$

Lassen wir nach Ausführung der Transformation die Akzente wieder fort, so ergibt sich

$$(39) \quad d\sigma^2 = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

und für die Lichtgeschwindigkeit

$$f = \frac{r - \frac{m}{2}}{r + \frac{m}{2}}.$$

Während die vorhin benutzten Koordinaten aus dem allgemeinen Ansatz (36) durch die Spezialisierung  $\lambda = 1$  hervorgingen, entsprechen die jetzt gewählten der Forderung  $l = 0$ . Deuten wir wiederum  $x_1 x_2 x_3$  als Cartesische Koordinaten eines Euklidischen Bildraumes, so ist der wirkliche Raum auf den Bildraum *konform* (winkeltreu) abgebildet. Das lineare Vergrößerungsverhältnis ist

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}} = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2.$$

Die singuläre Kugel ist jetzt durch  $r = \frac{m}{2}$  gegeben, das »Äußere« durch  $r > \frac{m}{2}$ , das Innere durch  $r < \frac{m}{2}$ .  $d\sigma^2$  ist regulär für alle  $r$ ,  $f$  wird nur für  $r = \frac{m}{2}$  zu Null. Der Umfang des Kreises  $x_1^2 + x_2^2 = r^2$  in der Ebene  $x_3 = 0$  beträgt

$$2\pi r \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2.$$

Durchläuft  $r$  abnehmend die Werte von  $+\infty$  bis  $\frac{m}{2}$ , so nimmt diese Funktion monoton ab; sinkt aber  $r$  unter  $\frac{m}{2}$ , so beginnt sie wieder zuzunehmen, um schließlich im Limes für  $r=0$  von neuem dem Werte  $+\infty$  zuzustreben. —

Eine *geladene Kugel* erzeugt außer dem kugelsymmetrischen Gravitationsfeld auch ein ebensolches elektrostatisches Feld; da sich beide Felder gegenseitig beeinflussen, können sie nur simultan bestimmt werden. Verwenden wir wie für die übrigen Größen so für die Elektrizität die gewöhnlichen Maßeinheiten des CGS-Systems (und nicht die sonst hier zugrunde gelegten Heavisideschen, die über den Faktor  $4\pi$  anders verfügen), so lautet in dem von Massen und Ladungen freien Gebiet das Integral, das für den Gleichgewichtszustand einen stationären Wert annimmt:

$$\int \left\{ w A' + \frac{\kappa}{c^2} \frac{\Phi'^2 r^2}{A} \right\} dr.$$

Die Bezeichnungen sind dieselben wie oben,  $\Phi$  ist das elektrostatische Potential. Als Wirkungsfunktion des elektrischen Feldes ist gemäß der klassischen Theorie das Quadrat des Feldbetrages zugrunde gelegt. Die Variation von  $w$  ergibt, ebenso wie im ladungslosen Fall,

$$A' = 0, \quad A = \text{konst.} = 1,$$

Variation von  $\Phi$  aber:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{r^2 \Phi'}{A} \right) = 0 \quad \text{und daraus} \quad \Phi = \frac{e_0}{r}.$$

Für das elektrostatische Potential erhält man demnach die gleiche Formel wie ohne Berücksichtigung der Gravitation; die Konstante  $e_0$  ist die das Feld erzeugende elektrische Ladung. Variiert man endlich  $A$ , so kommt

$$-w' - \frac{\kappa}{c^2} \frac{\Phi'^2 r^2}{A^2} = 0$$

und daraus

$$w = -2m + \frac{\kappa}{c^2} \frac{e_0^2}{r}, \quad \frac{1}{h^2} = f^2 = 1 - \frac{2\kappa m_0}{r} + \frac{\kappa}{c^2} \frac{e_0^2}{r^2}.$$

In  $f^2$  tritt, wie man sieht, außer dem von der Masse  $m_0$  abhängigen Glied  $-\frac{2\kappa m_0}{r}$  noch ein *elektrisches Zusatzglied* auf. Wir nennen  $\kappa m_0 = m$  den Gravitationsradius der Masse  $m_0$ ,  $\frac{\sqrt{\kappa}}{c} e_0 = e$  den *Gravitationsradius der Ladung*  $e_0$ . In Entfernungen  $r$  der Größenordnung  $m$  ist das Massenglied, in Entfernungen der Größenordnung  $e$  das elektrische Glied der 1 vergleichbar.  $f^2$  bleibt für alle Werte von  $r$  positiv, wenn  $e > m$  ist;

unter diesen Umständen können also Masse und Ladung auf einen Punkt zusammengedrängt sein. Für ein Elektron ist der Quotient  $\frac{e}{m}$  von der Größenordnung  $10^{20}$ . Daß am Elektron eine derartige reine Zahl auftritt, die von ganz anderer Größenordnung als 1 ist, macht die in der Mie-schen Theorie enthaltene These, daß alle aus den Maßgrößen des Elektrons und der Atome bestimmten reinen Zahlen sich als mathematische Konstante aus den Naturgesetzen ergeben müssen, einigermaßen bedenklich; so schwer es uns freilich auf der andern Seite fällt, zu glauben, daß dem Weltbau gewisse reine Zahlen von zufälligem numerischen Wert zugrunde liegen. — In Entfernungen, die mit

$$a = \frac{e_o^2}{m_o c^2}$$

vergleichbar sind, werden das Massenglied und das elektrische Glied im Gravitationspotential  $f$  von der gleichen Größenordnung; erst wenn  $r$  vielmal größer ist als  $a$ , gilt das Superpositionsprinzip in dem Sinne, daß das elektrostatische Potential in gewöhnlicher Weise durch die Ladung, das Gravitationspotential durch die Masse bestimmt ist. Demnach wird man  $a$  als Radius der Wirkungssphäre betrachten können; diese Größe tritt in jenen früher erwähnten Theorien, die auf Grund spezieller Ansätze den Energieinhalt des Elektrons ermitteln, als Elektronenradius auf. Es besteht das Verhältnis

$$a : e = e : m \quad \text{oder} \quad e = \sqrt{am}. \quad -$$

Das im Innern massiver Körper herrschende Gravitationsfeld ist nach der Einsteinschen Theorie erst bestimmt, wenn die dynamische Konstitution der Körper vollständig bekannt ist; in den Gravitationsgleichungen sind ja die mechanischen, also im statischen Fall die Gleichgewichtsbedingungen mit enthalten. Die einfachsten Verhältnisse, welche wir ins Auge fassen können, liegen vor, wenn die Körper aus einer *homogenen inkompressiblen Flüssigkeit* bestehen. Der Energietensor einer Flüssigkeit auf welche keine Volumkräfte wirken, wird nach § 24 durch die Gleichungen geliefert

$$T_{ik} = \mu^* u_i u_k - p g_{ik},$$

in denen die  $u_i$  die kovarianten Komponenten der Weltrichtung der Materie sind, der Skalar  $p$  den Druck bedeutet und  $\mu^*$  sich aus der konstanten Dichte  $\mu_o$  durch die Gleichung  $\mu^* = \mu_o + p$  bestimmt. Wir führen die Größen

$$\mu^* u_i = v_i$$

als Unabhängige ein und setzen

$$\frac{1}{2} L = \mu_o - \sqrt{v_i v^i}.$$

Dann ist, wenn wir nur die  $g^{ik}$  variieren, hingegen die  $v_i$  nicht:

$$\delta \mathfrak{L} = - \mathfrak{L}_{ik} \delta g^{ik} \quad (\mathfrak{L} = L \sqrt{g}, \quad \mathfrak{L}_{ik} = T_{ik} \sqrt{g}).$$

Folglich können wir die Gravitationsgleichungen in die auf diese Art der Variation sich beziehende Formel zusammenfassen

$$\delta \int (L - H) d\omega = 0.$$

Es ist aber wohl zu beachten, daß dieses Prinzip, wenn in ihm die  $v_i$  als Unabhängige variiert werden, *nicht* die richtigen hydrodynamischen Gleichungen ergibt (denn es käme einfach  $v_i = 0$ ). Diese, d. s. die Erhaltungssätze für Energie und Impuls, sind ja aber bereits in den Gravitationsgleichungen mitenthalten.

Im statischen Fall ist  $v_1 = v_2 = v_3 = 0$  und alle Größen sind unabhängig von der Zeit; wir setzen  $v_0 = v$  und wenden das Variationszeichen  $\delta^*$  in dem gleichen Sinne wie in § 27 an, wobei wir uns aber auf eine rein räumliche infinitesimale Verschiebung beschränken. Dann ist

$$\delta^* \mathfrak{L} = - \mathfrak{T}_{ik} \delta^* g^{ik} + h \delta^* v \quad \left( h = \frac{\mathcal{A}}{f} \right),$$

wobei  $\delta^* v$  nichts anderes bedeutet als den Unterschied von  $v$  an zwei Raumstellen, die durch die infinitesimale Verschiebung auseinander hervorgehen. Indem wir jetzt den Schluß, durch den wir in § 27 den Energie-Impuls-Satz gewannen, umkehren, folgern wir aus der Gültigkeit jenes Gesetzes, d. i.

$$\int \mathfrak{T}_{ik} \delta^* g^{ik} \cdot dx = 0$$

und der Gleichung

$$\int \delta^* \mathfrak{L} \cdot dx = 0,$$

daß  $\delta^* v = 0$  ist. Und das bedeutet, daß  $v$  in einem zusammenhängenden, von Flüssigkeit erfüllten Raumgebiet einen konstanten Wert besitzt. Das Energiegesetz ist identisch erfüllt, und das Impulsgesetz drückt sich am einfachsten in dieser Tatsache aus.

Eine einzige im Gleichgewicht befindliche Flüssigkeitsmasse wird hinsichtlich Massenverteilung und Feld Kugelsymmetrie besitzen. Spezialisieren wir auf diesen Fall, so haben wir für  $ds^2$  den gleichen, die drei unbekannten Funktionen  $\lambda$ ,  $l$ ,  $f$  enthaltenden Ansatz zu machen wie zu Beginn des § 30. Setzen wir von vornherein  $\lambda = 1$ , so entgeht uns diejenige Gleichung, welche durch Variation von  $\lambda$  entspringt. Für sie ist offenbar jene Gleichung ein voller Ersatz, welche die Invarianz der Wirkungsgröße bei infinitesimaler räumlicher Verschiebung in radialer Richtung aussagt, d. h. der Impulssatz  $v = \text{konst.}$  Das zu lösende Variationsproblem lautet jetzt

$$\delta \int \{ \mathcal{A}' w - r^2 \mu_0 \mathcal{A} + r^2 v h \} dr = 0;$$

dabei sind  $\mathcal{A}$  und  $h$  zu variieren,

$$w \text{ ist } = \left( \frac{1}{h^2} - 1 \right) r.$$

Beginnen wir mit der Variation von  $\mathcal{A}$ ; es kommt

$$w' + \mu_0 r^2 = 0, \quad w = -\frac{\mu_0}{3} r^3,$$

$$(40) \quad \boxed{\frac{1}{h^2} = 1 - \frac{\mu_0}{3} r^2}.$$

Die Flüssigkeitskugel habe den Radius  $r = r_0$ . Wir sehen, daß er notwendig

$$< a = \sqrt{\frac{3}{\mu_0}}$$

bleiben muß. Dabei ist für Energie und Masse die aus der Gravitationstheorie sich ergebende rationelle Einheit zugrunde gelegt. Für eine Wasserkugel ist jene obere Grenze beispielsweise

$$= \sqrt{\frac{3}{8\pi\kappa}} = 4 \cdot 10^8 \text{ km} = 22 \text{ Lichtminuten.}$$

Außerhalb der Kugel gelten unsere früheren Formeln, insbesondere ist dort

$$\frac{1}{h^2} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad \mathcal{A} = 1.$$

Die Grenzbedingungen verlangen, daß  $h$  und  $f$  stetig über die Kugeloberfläche hinübergehen und der Druck  $p$  daselbst verschwindet. Aus der Stetigkeit von  $h$  ergibt sich zunächst für den Gravitationsradius  $m$  der Flüssigkeitskugel

$$m = \frac{\mu_0 r_0^3}{6}.$$

Die zwischen  $r_0$  und  $\mu_0$  bestehende Ungleichung zeigt, daß der Radius  $r_0$  größer sein muß als  $2m$ . Bevor wir also, aus dem Unendlichen kommend, an die zu Beginn dieses Paragraphen erwähnte singuläre Kugel  $r = 2m$  gelangen, geraten wir in die Flüssigkeit hinein, und in ihr gelten andere Gesetze. Gehen wir zur Grammeinheit über, so ist  $\mu_0$  durch  $8\pi\kappa\mu_0$  zu ersetzen, und  $m$  ist  $= \kappa m_0$ , wenn  $m_0$  die gravitierende Masse bedeutet; dann findet sich

$$m_0 = \mu_0 \cdot \frac{4\pi r_0^3}{3}.$$

Da

$$v = \mu^* f = \frac{\mu^* \mathcal{A}}{h}$$

eine Konstante ist und an der Kugeloberfläche den Wert  $\frac{\mu_0}{h_0}$  annimmt, wo  $h_0$  den aus (40) zu entnehmenden Wert von  $h$  daselbst bedeutet, so ist im ganzen Innern

$$(41) \quad v = (\mu_0 + p)f = \frac{\mu_0}{h_0}.$$

Die Variation von  $h$  liefert

$$-\frac{2\mathcal{A}'}{h^3} + rv = 0.$$

Da aus (40)

$$\frac{h'}{h^3} = \frac{\mu_0}{3} r$$

folgt, findet man sofort

$$\mathcal{A} = \frac{3v}{2\mu_0} h + \text{konst.}$$

Zieht man noch den Wert (41) der Konstanten  $v$  heran und ermittelt den Wert der auftretenden Integrationskonstanten durch die Randbedingung  $\mathcal{A} = 1$  auf der Kugeloberfläche, so kommt

$$\mathcal{A} = \frac{3h - h_0}{2h_0}, \quad f = \frac{3h - h_0}{2hh_0}.$$

Endlich ergibt sich aus (41) jetzt

$$p = \mu_0 \cdot \frac{h_0 - h}{3h - h_0}.$$

Damit sind die metrische Fundamentalform des Raumes

$$d\sigma^2 = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - r^2},$$

das Gravitationspotential (oder die Lichtgeschwindigkeit,  $f$ ) und das Druckfeld  $p$  bestimmt.

Die im Innern der Kugel herrschende Geometrie stimmt auf einer durch ihr Zentrum gehenden Ebene überein mit der Geometrie auf einer Rotationsfläche  $z = F(r)$  im Euklidischen Raum. Es ist

$$F'^2 = \frac{r^2}{a^2 - r^2},$$

und daraus findet man ohne weiteres, daß jene Rotationsfläche eine Kugel vom Radius  $a$  ist. *Im ganzen Innern der Flüssigkeitskugel gilt die räumliche sphärische Geometrie, nämlich dieselbe wie auf der »Kugel«*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2$$

*im vierdimensionalen Euklidischen Raum mit den Cartesischen Koordinaten  $x_i$ .* Am elegantesten führt man diese Betrachtung vielleicht so durch. Der Winkel  $d\varphi$ , unter dem zwei unendlich benachbarte Punkte,  $p$  mit den Koordinaten  $x_i$  und  $p'$  mit den Koordinaten  $x_i + dx_i$ , in diesem vierdimensionalen Raum vom Nullpunkt  $O$  aus erscheinen, d. h. der Winkel der Strahlen  $Op$  und  $Op'$  bestimmt sich aus

$$42) \quad \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum dx_i^2 - \left(\sum x_i dx_i\right)^2}{\left(\sum x_i^2\right)^2} = d\varphi^2$$

(Summation über  $i$  von 1 bis 4). Sind  $P, P'$  die Durchstoßpunkte dieser Strahlen mit der Kugel um  $O$  vom Radius  $a$  und ist  $d\sigma$  deren Abstand auf der Kugel, so ist  $d\sigma = a d\varphi$ . Wählen wir für  $p$  und  $p'$  die Punkte  $P$  und  $P'$  selber, so ist

$$\sum x_i^2 = a^2, \quad \sum x_i dx_i = 0.$$

Benutzen wir als Gaußsche Koordinaten der Kugelpunkte die ersten drei Cartesischen  $x_1 x_2 x_3$ , so liefert (42) demnach

$$(43) \quad d\sigma^2 = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{x_4^2},$$

wo

$$x_4^2 = a^2 - r^2, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

ist. Das ist genau die gleiche Formel, welche wir hier für das Innere der Flüssigkeitskugel hergeleitet haben. Wählen wir aber für  $p$  und  $p'$  die in der Ebene  $x_4 = a$  gelegenen Projektionspunkte der Kugelpunkte  $P, P'$ , so kommt, da dann  $dx_4 = 0$  ist:

$$(44) \quad \frac{d\sigma^2}{a^2} = \frac{(a^2 + r^2)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{(a^2 + r^2)^2},$$

und das ist jene Gestalt der metrischen Fundamentalform des sphärischen Raumes, welche uns in Kap. II, § 11 begegnete. Der Übergang von (43) zu (44) wird durch die Koordinatentransformation bewirkt

$$x'_1 = \frac{r'}{r} x_1, \quad x'_2 = \frac{r'}{r} x_2, \quad x'_3 = \frac{r'}{r} x_3; \quad r' = \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Diese Ergebnisse über die Flüssigkeitskugel sind zuerst von Schwarzschild gewonnen worden<sup>28</sup>). Nachdem die wichtigsten Fälle des kugelsymmetrischen statischen Gravitationsfeldes erledigt waren, gelang es dem Verfasser, das allgemeinere Problem des *rotations-(zylinder-)symmetrischen statischen Feldes* zu lösen<sup>29</sup>). Hier mögen nur die einfachsten Resultate dieser Untersuchung eine kurze Erwähnung finden. Es handle sich zunächst um *ungeladene Massen* und um das Gravitationsfeld in dem von Materie freien Raum. Aus den Gravitationsgleichungen ergibt sich dann daß unter Einführung gewisser Raumkoordinaten  $r, \theta, z$ , der *kanonischen Zylinderkoordinaten*,

$$ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2, \quad d\sigma^2 = h(dr^2 + dz^2) + \frac{r^2 d\theta^2}{f^2}$$

wird.  $\theta$  ist ein Winkel, der mod.  $2\pi$  zu nehmen ist; d. h. Werten von  $\theta$ , welche sich um ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  unterscheiden, entspricht derselbe Punkt. Auf der Rotationsachse wird  $r = 0$ .  $h$  und  $f$  sind Funktionen von  $r$  und  $z$ . Wir bilden den wirklichen Raum auf einer Euklidischen ab, in welchem  $r, \theta, z$  Zylinderkoordinaten sind. Das kanonische Koordinatensystem ist eindeutig bestimmt bis auf eine Verschiebung in Richtung der Rotationsachse:  $z' = z + \text{konst.}$  Wenn  $h = f = 1$  ist, stimmt  $d\sigma^2$  mit der metrischen Grundform des Euklidischen Bildraums

überein. Das Gravitationsproblem kann in ebenso einfacher Weise wie nach der Newtonschen Theorie gelöst werden, wenn die Massenverteilung im kanonischen Koordinatensystem bekannt ist. Überträgt man nämlich die Massen in unsern Bildraum, d. h. bringt in ihm eine solche Massenverteilung an, daß die in irgend einem Stück des wirklichen Raums enthaltene Masse gleich der Masse in dem korrespondierenden Stück des Bildraums ist, und ist dann  $\psi$  das Newtonsche Potential dieser Massenverteilung im Euklidischen Bildraum, so gilt die einfache Formel

$$(45) \quad f = e^{\psi/c^2}.$$

Auch die andere noch unbekannte Funktion  $h$  läßt sich durch Lösung einer gewöhnlichen Poissonschen Gleichung (in der Meridianebene  $\theta = 0$ ) bestimmen. — Handelt es sich um *geladene Körper*, so existiert das kanonische Koordinatensystem gleichfalls. Nimmt man an, daß die Massen gegenüber den Ladungen zu vernachlässigen sind, d. h. daß für ein beliebig herausgegriffenes Raumstück der Gravitationsradius der in ihm enthaltenen elektrischen Ladungen immer vielmal größer ist als der Gravitationsradius der in ihm enthaltenen Massen, und bedeutet  $\varphi$  das nach der klassischen Theorie berechnete elektrostatische Potential der in den kanonischen Bildraum übertragenen Ladungen, so gelten für  $f$  und für das elektrostatische Potential  $\Phi$  im wirklichen Raum die Formeln

$$(46) \quad \Phi = \frac{c}{V\kappa} \operatorname{tg} \left( \frac{V\kappa}{c} \varphi \right), \quad f = - \frac{1}{\cos \left( \frac{V\kappa}{c} \varphi \right)}.$$

Einigermassen überraschend gestaltet sich die Einordnung des kugelsymmetrischen Falles in diese allgemeinere Theorie. Eine Euklidische Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten  $r, z$  schlitze man auf längs der auf der  $z$ -Achse durch  $-m \leq z \leq +m$  charakterisierten Strecke. Aus zwei übereinander liegenden Exemplaren dieser geschlitzten Ebene stelle man sich eine zusammenhängende zweiblättrige Riemannsche Fläche dadurch her, daß man die Schlitzränder kreuzweise zusammenheftet, und dieses Gebilde lasse man um die  $z$ -Achse rotieren. Dann erhält man einen »zweiblättrigen« Euklidischen Raum. Auf ihn wird durch die kanonischen Koordinaten der Gesamtraum, in welchem sich das statische Feld eines »Massenpunktes« ohne Ladung befindet (vgl. den Anfang dieses Paragraphen), umkehrbar eindeutig und stetig abgebildet. Der singulären Kugel, auf welcher die Masse verteilt ist, entspricht dabei der vorhin angegebene Schlitz. Von den früher benutzten »konformen« Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$ , die, wenn man sie als Cartesische Koordinaten in einem Euklidischen Bildraum deutet, die konforme Abbildung des wirklichen Raumes auf den Bildraum bewirken, gelangt man zu den kanonischen, wenn man von den konformen zunächst zu den ihnen korrespondierenden Zylinderkoordinaten übergeht:

$$x_1 = r' \cos \theta', \quad x_2 = r' \sin \theta', \quad x_3 = z'$$

und dann in der Meridianebene die Transformation

$$(r' + iz') + \frac{(m/2)^2}{r' + iz'} = r + iz \quad (i = \sqrt{-1})$$

durchführt.

Wie die Gesetze der Mieschen Elektrodynamik, so sind auch die *Einsteinschen Gravitationsgesetze nicht-linear*. Diese Nicht-Linearität macht sich in denjenigen Abmessungen, welche der direkten Beobachtung zugänglich sind, nicht merkbar, weil in ihnen die nichtlinearen Glieder vollständig gegenüber den linearen zu vernachlässigen sind; das hat zur Folge, daß wir in dem Kräftespiel der sichtbaren Welt das *Superpositionsprinzip* durchweg bestätigt finden. Höchstens für die seltsamen Vorgänge innerhalb des Atoms, von denen wir uns heute noch kein klares Bild machen können, kommt jene Nicht-Linearität möglicherweise in Betracht. Bei nichtlinearen Differentialgleichungen liegen, namentlich was ihre Singularitäten betrifft, im Vergleich zu den linearen äußerst komplizierte, unerwartete und vorerst noch ganz und gar unbeherrschbare Verhältnisse vor, und es liegt nahe, diese beiden Dinge: das sonderbare Verhalten nichtlinearer Differentialgleichungen und die Eigentümlichkeiten intratomistischer Vorgänge in Zusammenhang miteinander zu bringen. Die Gleichungen (45), (46) bieten ein schönes und einfaches Beispiel dafür dar, wie sich das Superpositionsprinzip in der strengen Gravitationstheorie modifiziert: die Feldpotentiale  $f$  und  $\Phi$  hängen in dem einen Falle durch die Exponentialfunktion, in dem andern durch die trigonometrischen von derjenigen Größe  $\psi$ , bzw.  $\varphi$  ab, welche dem Superpositionsprinzip genügt. Zugleich aber zeigen jene Formeln deutlich, daß von der Nicht-Linearität der Gravitationsgleichungen für das Verständnis der Vorgänge im Atom und der Konstitution des Elektrons nichts zu erhoffen ist. Denn die Abweichungen zwischen  $\varphi$  und  $\Phi$  werden erst dort merklich

wo  $\frac{\sqrt{z}}{c} \varphi$  Werte annimmt, die mit 1 vergleichbar sind. Das ist aber selbst im Innern des Elektrons nicht der Fall; damit jene Abweichung für den Bau des Elektrons bedeutungsvoll würde, müßte vielmehr seine Ladung  $e_0$  auf einen Bereich zusammengedrängt sein, dessen Radius die Größenordnung des Gravitationsradius

$$e = \frac{\sqrt{z}}{c} e_0 \sim 10^{-33} \text{ cm}$$

dieser Ladung hätte.

Bei der Ermittlung der bisher angegebenen strengen Lösungen der Gravitationsgleichungen handelte es sich immer um eine Fragestellung der folgenden Art. Bekannt sei, daß ein »kanonisches Koordinatensystem« existiert, in welchem die invariante quadratische Form  $T_{ik} dx_i dx_k$  der Materie eine besondere Gestalt annimmt (z. B. eine Kombination von

$$dx_0^2, \quad dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2, \quad (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2$$

ist mit Koeffizienten, die nur von  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  abhängen: Kugelsymmetrie); dann existiert ein den Gravitationsgleichungen genügendes Schwerefeld  $g_{ik} dx_i dx_k$ , welches in den kanonischen Koordinaten die gleiche Normalform annimmt, und es sollen aus bekannten Ansätzen für die  $T_{ik}$  in diesem kanonischen Koordinatensystem die  $g_{ik}$  ermittelt werden. Wie wir in § 16 in dem Verschwinden des Riemannschen Flächentensors der Krümmung die allgemein invariante Bedingung dafür erkannten, daß sich eine quadratische Form mittels Einführung kanonischer Koordinaten auf die »Euklidische«, durch konstante Koeffizienten ausgezeichnete Gestalt bringen läßt, so kann man sich hier die mathematische Aufgabe stellen, analog die invarianten Bedingungen dafür zu ermitteln, daß sich der quadratischen Form der Materie durch Transformation auf geeignete Koordinaten die gewünschte besondere Gestalt verleihen läßt. Wenn dies gelungen ist, können wir die Probleme, welche hier gelöst wurden, in einer dem Gedanken der allgemeinen Relativität besser entsprechenden Weise formulieren, nämlich so, daß wir dabei von besonderen »kanonischen« Koordinatensystemen keinen Gebrauch mehr machen.

Es ist klar, daß die Differentialgleichungen der Gravitation die Lösungen nicht eindeutig bestimmen können, sondern daß *Randbedingungen* hinzutreten müssen. Die von uns gefundenen Lösungen waren von solcher Art, daß die metrische Fundamentalform im räumlich Unendlichen gegen die für die spezielle Relativitätstheorie charakteristische

$$dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

konvergiert. Diese Lösungen dürfen wir als die physikalisch richtigen ansprechen, sofern wir annehmen, daß (bei Zugrundelegung der kanonischen Koordinaten) sich in weiter Entfernung große Massen befinden, die im ganzen ruhend und gleichmäßig verteilt sind. Durch diese Annahme kommen wir um das Problem der Randbedingungen in analoger Weise herum wie in der Elektrostatik, wenn wir alle Kraftlinien auf einer großen Metallkugel enden lassen. Die prinzipielle Frage ist damit aber nicht erledigt; ihre Beantwortung wird jedoch offenbar erst möglich sein, wenn wir uns über die Zusammenhangsverhältnisse der Welt im großen klar geworden sind. Von neuem werden wir hier auf dieses schon einmal angeschnittene, heute noch sehr dunkle Problem geführt, in das wir auf einen engen Weltbezirk beschränkte Wesen kaum anders als auf spekulativem Wege jemals werden Licht bringen können.

### § 32. Hamiltonsches Prinzip der Maxwell-Lorentzschen Theorie unter Berücksichtigung der Gravitation <sup>20)</sup>.

In § 28 gelangten wir zu einem Wirkungsprinzip als dem universellen Weltgesetz; seine Anwendung auf konkrete Vorgänge scheiterte aber daran, daß uns im Grunde nur die allgemeine Form dieses Gesetzes bekannt ist, da wir nicht wissen, was für eine Funktion der unabhängigen Zustandsgrößen die in ihm auftretende Wirkungsdichte  $L$  ist. Unter diesen

Umständen ist es von Wichtigkeit, ein Prinzip zu formulieren, das freilich nicht den Anspruch eines exakt gültigen Weltgesetzes machen kann, das aber so weit trägt, als unsere Kenntnis der Materie heute sicher reicht. In einer solchen Theorie (die wir der uns vorläufig verschlossenen exakten als eine »phänomenologische« gegenüberstellen dürfen) müssen wir freilich eine der wichtigsten Erkenntnisse der Relativitätstheorie, die vom Wesen der Materie, preisgeben und auf die alte Vorstellung der sich bewegenden *Substanz* als einer ursprünglichen physikalischen Gegebenheit zurückgreifen. Es handelt sich darum, folgende Gesetze in ein einziges Wirkungsprinzip zusammenzufassen \*):

1. die inhomogenen Gravitationsgleichungen (24); der Energietensor wird sich dabei allein aus demjenigen zusammensetzen, der nach der Maxwell-Lorentzschen Theorie für das elektromagnetische Feld im Äther gilt [Kap. III, Formel (22'), S. 130] und dem kinetischen Energietensor  $\mu u_i u_k$  der Materie im engeren Sinne; von der feineren atomistischen Struktur der Materie und ihren noch unaufgeklärten Kohäsionskräften ist dabei also abgesehen;

2. die Maxwell-Lorentzschen Feldgleichungen

$$(47) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = F_{ik}, \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} F^{ik})}{\partial x_k} = s^i,$$

die wie in der Elektronentheorie dadurch einen konkreten Inhalt gewinnen, daß als elektrischer Strom nur Konvektionsstrom auftritt:

$$(48) \quad s^i = \rho u^i;$$

3. die mechanischen Gleichungen

$$(49) \quad \mu \left( \frac{du^i}{ds} + \left\{ \begin{matrix} i \\ l \end{matrix} \right\} u^l u^l \right) = p^i,$$

in denen der Vektor  $p^i$  die ponderomotorische Wirkung des elektromagnetischen Feldes

$$(50) \quad p^i = F^{ik} s_k$$

darstellt.

Aus der invarianten quadratischen und linearen Form

$$(51) \quad g_{ik} dx_i dx_k \quad \text{und} \quad (52) \quad \varphi_i dx_i,$$

welche das Gravitations- bzw. das elektromagnetische Feld darstellen, bilden wir uns wie früher (nur mit Zusatz des unwesentlichen Faktors  $\frac{1}{2}$ ):

die *Feldwirkung der Gravitation* (in  $\mathcal{G}$ ), das über ein Weltgebiet  $\mathcal{G}$  erstreckte Integral  $-\frac{1}{2} \int H d\omega$  der in Formel (23) definierten Größe  $H$ , und

die *Feldwirkung der Elektrizität*:  $\frac{1}{2} \int L d\omega$ ,

$$L = L^0 = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} \quad \left( F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right).$$

$d\omega$  ist wiederum das vierdimensionale Volumelement.

\*) Ich verwende frühere Bezeichnungen, nur stehe  $\mu$  und  $\rho$  statt  $\mu_0$  und  $\rho_0$ .

Die Substanz ist ein dreidimensionales Kontinuum (ihre Stellen könnten wir also in stetiger Weise auf die Wertsysteme von drei Koordinaten beziehen). Wir denken uns die Substanz in infinitesimale Elemente zerlegt; jedem Substanzelement kommt dann eine bestimmte unveränderliche positive »materielle Ladung« (Masse)  $dm$  und eine unveränderliche »elektrische Ladung«  $de$  zu; ihm korrespondiert als Ausdruck seiner Geschichte eine mit Durchlaufungssinn versehene Weltlinie. Die Bewegung der Substanz und das Schwerfeld stehen in solcher Beziehung zueinander, daß längs jeder Weltlinie

$$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k > 0$$

ist. Die Größe

$$(53) \quad \int \{ dm \int \sqrt{g_{ik} dx_i dx_k} \} = \int \{ dm \int ds \},$$

in der sich das innere Integral über denjenigen Teil der Weltlinie eines beliebigen, mit der materiellen Ladung  $dm$  versehenen Substanzelements erstreckt, welcher innerhalb des Weltgebiets  $\mathcal{G}$  verläuft, das äußere Integral aber über die gesamte Substanz (oder über denjenigen Teil der Substanz, der während seiner Bewegung in  $\mathcal{G}$  eindringt), nenne ich die *Substanzwirkung der Gravitation*. Indem man zur Darstellung des dreidimensionalen Substanzkontinuums drei Koordinaten benutzt, erkennt man, daß es eine invariante Raum-Zeit-Funktion  $\mu$  gibt von der Art, daß für jedes Gebiet  $\mathcal{G}$  die Gleichung

$$\int \{ dm \int ds \} = \int_{\mathcal{G}} \mu d\omega$$

besteht.  $\mu$  heiße die absolute Massendichte, sie entspricht der »Ruhdichte« in der speziellen Relativitätstheorie.

Ersetzt man in (53) die Masse  $dm$  des Substanzelements durch seine Ladung  $de$ , die Wurzel aus der quadratischen Form (51) durch die lineare Form (52), so erhalten wir die *Substanzwirkung der Elektrizität*:

$$(54) \quad \int \{ de \int \varphi_i dx_i \}.$$

Man sieht: die elektrische Ladung gehört in der gleichen Weise zum elektrischen Feld, wie die materielle Ladung zum Gravitationsfeld. Die absolute Ladungsdichte  $\varrho$  wäre zu definieren durch die Gleichung

$$\int \{ de \int ds \} = \int_{\mathcal{G}} \varrho d\omega.$$

Jetzt formuliert sich das Hamiltonsche Prinzip, welches die geforderte Zusammenfassung leistet, so:

*Die Gesamtwirkung, d. h. die Summe aus Feld- und Substanzwirkung der Gravitation und Elektrizität, hat in jedem Weltgebiet einen stationären Wert gegenüber beliebigen, an den Grenzen verschwindenden Variationen des elektromagnetischen und Gravitations-Feldes und ebensolchen raumzeitlichen Verschiebungen der sich bewegenden Substanzelemente (oder ihrer Weltlinien).*

Variation der  $g^{ik}$  (bei ungeändertem elektromagnetischen Feld und ungeänderten Weltlinien der Substanz) ergibt die Gravitationsgleichungen (24), Variation der elektromagnetischen Potentiale  $\varphi_i$  die Maxwell-Lorentzschen

Feldgleichungen (47), (48). Verschiebt man ein Stück einer Weltlinie unter Festhaltung seiner Enden unendlich wenig, so haben wir in § 17 gesehen, ist

$$\delta \int \sqrt{g_{ik}} dx_i dx_k = - \int \gamma_i \delta x_i ds,$$

wo

$$\gamma_i = \frac{d}{ds} (g_{ik} u^k) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i} u^k u^l.$$

Infolgedessen ist bei einer solchen raumzeitlichen Verschiebung der Substanzelemente, wie sie in dem eben angegebenen Wirkungsprinzip gefordert wird,

$$\delta \int \{ dm \int \sqrt{g_{ik}} dx_i dx_k \} = - \int \{ dm \int \gamma_i \delta x_i ds \} = - \int \mu \gamma_i \delta x_i \cdot d\omega.$$

Ermittelt man auf dem gleichen Wege die Variation, welche bei diesem Prozeß die Substanzwirkung der Elektrizität erfährt, so ergeben sich die behaupteten mechanischen Gleichungen (49). Zu den bisher erwähnten Gesetzen tritt noch die Kontinuitätsgleichung der Elektrizität und der Materie.

Das so gewonnene System kann natürlich nicht aus lauter voneinander unabhängigen Gleichungen bestehen. In der Tat ist die Kontinuitätsgleichung der Elektrizität eine mathematische Folge der elektromagnetischen Feldgesetze, und man überzeugt sich ferner leicht, daß die mechanischen Gesetze und die Kontinuitätsgleichung der Materie aus den elektromagnetischen Feldgleichungen und denen der Gravitation folgen. Denn aus den letzteren ergibt sich

$$(55) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} T_i^k)}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} T^{rs} = 0.$$

Benutzt man ein geodätisches Koordinatensystem, so kann man sich einfach auf die in Kap. III, § 19 und § 23 für den potentiellen und kinetischen Energietensor durchgeführten Rechnungen berufen. Insbesondere geht aus § 23 hervor, daß die auf der linken Seite von (55) stehende invariante Operation, auf

$$T^{ik} = \mu u^i u^k$$

angewendet, zu

$$M u_i + \mu \gamma_i$$

führt, wo  $M$  die linke Seite der Kontinuitätsgleichung der Materie ist:

$$M = \frac{\partial (\mu u^k)}{\partial x_k}.$$

Es kommt also

$$M u_i + \mu \gamma_i + p_i = 0.$$

Indem wir mit  $u^i$  multiplizieren und nach dem Index  $i$  summieren, ergibt sich aber, da aus der Definition von  $p_i$  und  $\gamma_i$  folgt:

$$u^i p_i = u^i \gamma_i = 0,$$

die Kontinuitätsgleichung  $M = 0$  und darauf die mechanischen

$$\mu \gamma_i + p_i = 0.$$

Durch die Gegenüberstellung des gegenwärtigen Hamiltonschen Prinzips, in welchem die Wirkungsichte eine vollständig bekannte Funktion der unabhängigen Zustandsgrößen ist, und des in größere Tiefen hinabreichenden in § 28 formulierten Prinzips, das aber für uns heute noch ein unausgefülltes Schema bleiben muß, wird der Kontrast zwischen *Substanzphysik* und reiner *Feldphysik* besonders deutlich. Es bleibt bemerkenswert, daß auch bei Festhaltung des Substanzbegriffs die Maxwell-Lorentzsche Elektrodynamik samt der relativistischen Mechanik und der Gravitation sich auf ein einziges Wirkungsprinzip zurückführen läßt. Die Existenz des Elektrons freilich kann diese Theorie nicht erklären, weil in ihr Kohäsionskräfte fehlen; aber an diesem Punkte ist eben auch unsere gegenwärtige Kenntnis von der Materie zu Ende.

### § 33. Betrachtungen über die Welt als Ganzes.

Die allgemeine Relativitätstheorie läßt es durchaus dahingestellt, ob die Weltpunkte in umkehrbar-eindeutiger und stetiger Weise durch die Werte von 4 Koordinaten  $x_i$  dargestellt werden können. Sie setzt lediglich voraus, daß die *Umgebung* eines jeden Weltpunktes eine umkehrbar-eindeutige stetige Abbildung auf ein Gebiet des vierdimensionalen »Zahlenraumes« gestattet (wobei unter »Punkt des vierdimensionalen Zahlenraumes« jedes Zahlenquadrupel verstanden ist); über den Zusammenhang der Welt im ganzen macht sie von vornherein keine Annahmen. — Wenn wir in der Flächentheorie von einer Parameterdarstellung der zu untersuchenden Fläche ausgehen, so bezieht sich diese auch immer nur auf ein Flächenstück, nicht aber auf die ganze Fläche, die im allgemeinen keineswegs eindeutig und stetig auf die Euklidische Ebene oder ein ebenes Gebiet abgebildet werden kann. Von denjenigen Eigenschaften der Flächen, die bei allen eindeutigen stetigen Abbildungen erhalten bleiben, handelt die *Analysis situs*; die *Geschlossenheit* ist z. B. eine derartige Analysis-situs-Eigenschaft. Jede Fläche, die aus der Kugel durch stetige Deformation hervorgeht, ist auf dem Standpunkt der Analysis situs von der Kugel nicht verschieden, wohl aber z. B. der Torus. Auf dem Torus gibt es nämlich geschlossene Linien, welche den Torus nicht in mehrere Gebiete zerlegen, auf einer Kugel existieren derartige Linien nicht. Aus der Geometrie auf der Kugel ging jene »sphärische Geometrie«, welche wir in § 10 mit Riemann der Bolyai-Lobatschefskyschen gegenüberstellten, dadurch hervor, daß wir je zwei einander diametral gegenüberliegende Kugelpunkte identifizierten. Die so entstehende Fläche  $\mathfrak{F}$  ist von der Kugel gleichfalls im Sinne der Analysis situs verschieden, und zwar durch diejenige Eigenschaft, welche man als ihre Einseitigkeit bezeichnet. Denkt man sich ein kleines, auf einer Fläche liegendes, beständig im gleichen Sinne rotierendes Rädchen während der Rotation über diese Fläche hinbewegt, wobei der Mittelpunkt eine geschlossene Bahn beschreibe, so sollte man erwarten, wenn das Rädchen wieder an seinen Ausgangsort zurückkehrt, so rotiere es hier im gleichen Sinne wie im Anfang seiner

Bewegung. Ist dies der Fall, welche geschlossene Kurve der Mittelpunkt des Rädchens auch auf der Fläche beschrieben haben mag, so heißt sie *zweiseitig*; im andern Falle aber *einseitig*. Daß es einseitige Flächen gibt, ist zuerst von Möbius bemerkt worden. Die oben erwähnte Fläche  $\mathfrak{F}$  ist einseitig, während die Kugel natürlich zweiseitig ist. Man sieht das ohne weiteres ein, wenn man den Mittelpunkt des Rädchens einen größten Kreis durchlaufen läßt; auf der Kugel muß der *ganze* Kreis durchlaufen werden, ehe diese Bahn sich schließt, auf  $\mathfrak{F}$  jedoch nur der *halbe*. — Ganz analog wie eine zweidimensionale kann nun auch eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit sehr verschiedenerlei Analysis-situs-Beschaffenheit besitzen. Aber auf jeder vierdimensionalen Mannigfaltigkeit läßt sich die Umgebung eines Punktes gewiß in stetiger Weise durch 4 Koordinaten darstellen derart, daß verschiedenen Punkten dieser Umgebung immer verschiedene Koordinatenquadrupel korrespondieren. Genau in diesem Sinne ist die Benutzung der 4 Weltkoordinaten zu verstehen.

Von jedem Weltpunkt geht der Doppelkegel der aktiven Zukunft und der passiven Vergangenheit aus. Während in der speziellen Relativitätstheorie diese durch ein Zwischengebiet getrennt sind, ist es hier an sich sehr wohl möglich, daß der Kegel der aktiven Zukunft über den der passiven Vergangenheit hinübergreift; es kann also prinzipiell geschehen, daß ich jetzt Ereignisse miterlebe, die zum Teil erst eine Wirkung meiner künftigen Entschlüsse und Handlungen sind. Auch ist es nicht ausgeschlossen, daß eine Weltlinie, obschon sie in jedem Punkte zeitartige Richtung besitzt, insbesondere die Weltlinie meines Leibes, in die Nähe eines Weltpunktes zurückkehrt, den sie schon einmal passierte. Daraus würde dann ein radikaleres Doppelgängertum resultieren, als es je ein E. T. A. Hoffmann ausgedacht hat. Tatsächlich kommen ja so erhebliche Variabilitäten der  $g_{ik}$ , wie dazu erforderlich wären, in dem Weltgebiet, in welchem wir leben, nicht vor; doch hat es ein gewisses Interesse, diese Möglichkeiten durchzudenken mit Rücksicht auf das philosophische Problem des Verhältnisses von kosmischer und phänomenaler Zeit. So Paradoxes da zutage kommt, ein eigentlicher Widerspruch zu den in unserem Erleben unmittelbar gegebenen Tatsachen tritt nirgendwo hervor.

In § 25 sahen wir, daß ohne Berücksichtigung der Gravitation die elektrodynamischen Grundgesetze (nach Mie) eine solche Gestalt besitzen, wie sie durch das *Kausalitätsprinzip* gefordert ist: die Ableitungen der Zustandsgrößen nach der Zeit drücken sich aus durch diese Größen selber und ihre räumlichen Differentialquotienten. Diese Tatsachen bleiben bestehen, wenn wir die Gravitation mit hereinziehen und somit die Tabelle der Zustandsgrößen  $\varphi_i, F_{ik}$  durch die  $g_{ik}$  und  $\left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ r \end{smallmatrix} \right\}$  erweitern. Wegen der allgemeinen Invarianz der Naturgesetze muß aber die Behauptung dahin formuliert werden, daß aus den Werten der Zustandsgrößen für einen Moment alle diejenigen Aussagen über sie, *welche invarianten Charakter tragen*, auf Grund der Naturgesetze folgen; und es muß ferner

beachtet werden, daß diese Behauptung sich nicht auf die Welt als Ganzes, sondern nur jeweils auf einen durch 4 Koordinaten darstellbaren Ausschnitt beziehen kann. Wir verfahren mit Hilbert folgendermaßen<sup>21)</sup>. In der Umgebung des Weltpunktes  $O$  führen wir 4 Koordinaten  $x_i$  ein, so daß in  $O$  selber

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

wird. Wir können in dem dreidimensionalen Raum  $x_0 = 0$  um  $O$  eine solche Umgebung  $\mathfrak{H}$  abgrenzen, daß in ihr durchweg  $-ds^2$  positiv-definit bleibt. Durch jeden Punkt dieser Umgebung ziehen wir die zu jenem Raum orthogonale geodätische Weltlinie, die zeitartige Richtung besitzt. Diese werden eine gewisse vierdimensionale Umgebung von  $O$  einfach überdecken. Wir führen jetzt neue Koordinaten ein, die freilich in dem dreidimensionalen Raum  $\mathfrak{H}$  mit den bisherigen übereinstimmen; wir schreiben nämlich demjenigen Punkte  $P$ , zu welchem wir gelangen, wenn wir von dem Punkt  $P_0 = (x_1, x_2, x_3)$  in  $\mathfrak{H}$  auf der durch ihn hindurchlaufenden orthogonalen geodätischen Weltlinie so weit gehen, daß die Eigenzeit des durchlaufenen Bogens  $P_0P$  gleich  $x_0$  ist, jetzt die Koordinaten  $x_0, x_1, x_2, x_3$  zu. Diese geodätischen Koordinaten sind von Gauß in der Flächentheorie eingeführt worden (vgl. auch § 14). Da auf jeder der geodätischen Linien  $ds^2 = dx_0^2$  ist, muß bei Benutzung dieses Koordinatensystems identisch in allen vier Koordinaten

$$(56) \quad g_{00} = 1$$

sein. Weil die Linien orthogonal sind zu dem dreidimensionalen Raum  $x_0 = 0$ , ist für  $x_0 = 0$ :

$$(57) \quad g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0.$$

Da ferner diejenigen Linien, welche man erhält, wenn man  $x_1, x_2, x_3$  konstant läßt und nur  $x_0$  variiert, geodätisch sind, muß (siehe die Gleichung der geodätischen Linien)

$$\left\{ \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ & i \end{smallmatrix} \right\} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

werden, mithin auch

$$\left[ \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ & i \end{smallmatrix} \right] = 0.$$

Unter Berücksichtigung von (56) folgt daraus

$$\frac{\partial g_{ci}}{\partial x_0} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

und wegen (57) ist infolgedessen nicht nur für  $x_0 = 0$ , sondern identisch in allen vier Koordinaten

$$(58) \quad g_{0i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Wir haben folgende Figur vor uns: eine Schar von geodätischen Linien mit zeitartiger Richtung, welche ein gewisses Weltgebiet einfach und lückenlos überdecken und eine ebensolche einparametrische Schar von dreidimen-

sionalen Räumen  $x_0 = \text{konst.}$  Gemäß (58) sind diese beiden Scharen überall zueinander orthogonal; und die auf den geodätischen Linien durch zwei der »parallelen« Räume  $x_0 = \text{konst.}$  abgeschnittenen Bogenstücke haben alle die gleiche Eigenzeit. Benutzen wir dieses besondere Koordinatensystem, so ist

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_0} = -2 \left\{ \begin{matrix} i & k \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

und die Gravitationsgleichungen gestatten, die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ \begin{matrix} i & k \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

außer durch die  $\varphi_i$  und ihre Ableitungen auszudrücken durch die  $g_{ik}$ , deren Ableitungen 1. und 2. Ordnung nach  $x_1, x_2, x_3$  und die  $\left\{ \begin{matrix} i & k \\ 0 \end{matrix} \right\}$  selber. Indem wir also die 12 Größen

$$g_{ik}, \quad \left\{ \begin{matrix} i & k \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

neben den elektromagnetischen als die Unbekannten betrachten, geht das gewünschte Resultat hervor (wobei  $x_0$  die Rolle der Zeit spielt). Der von einem Punkt  $O'$  mit positiver  $x_0$ -Koordinate gelegte Kegel der passiven Vergangenheit wird aus  $\mathfrak{R}$  ein gewisses Stück  $\mathfrak{W}$  heraus schneiden, das mit dem Mantel jenes Kegels zusammen ein endliches Weltgebiet  $\mathfrak{G}$  (eine Kegelhaube mit Spitze in  $O'$ ) begrenzt. Wenn unsere Behauptung, daß die geodätischen Nulllinien die Einsatze jeder Wirkung bezeichnen, streng richtig ist, muß der Satz gelten, daß durch die Werte der erwähnten 12 Größen, dazu der elektromagnetischen Potentiale  $\varphi_i$  und Feldgrößen  $F_{ik}$  in dem dreidimensionalen Raumgebiet  $\mathfrak{W}$  deren Werte im Weltgebiet  $\mathfrak{G}$  vollständig bestimmt sind. Er ist bisher nicht bewiesen worden. *Auf jeden Fall aber erkennt man, daß die Differentialgleichungen des Feldes die vollständigen Naturgesetze enthalten* und nicht etwa noch eine weitere Eingrenzung durch Randbedingungen im räumlich-Unendlichen oder dgl. stattfinden kann.

Einstein gelangte bei kosmologischen Betrachtungen über den Zusammenhang der Welt im großen <sup>22)</sup> zu der Vermutung, daß sie räumlich geschlossen sei. Wie in der Newtonschen Gravitationstheorie das in der Poissonschen Gleichung ausgesprochene Nahewirkungsgesetz das Newtonsche Attraktionsgesetz nur nach sich zieht, wenn man die Bedingung hinzufügt, daß das Gravitationspotential im Unendlichen verschwindet, so sucht Einstein zunächst auch in seiner Theorie die Differentialgleichungen durch Randbedingungen im räumlich-Unendlichen zu ergänzen. Der Unmöglichkeit gegenüber, solche Bedingungen allgemein invarianten Charakters zu formulieren, welche mit den astronomischen Tatsachen im Einklang stehen, findet er als einzigen Ausweg die Annahme, daß die Welt räumlich geschlossen sei; denn unter dieser Annahme fallen Randbedingungen

nattürlich fort. Dieser Argumentation kann ich zufolge dem oben Ausgeführten keine Beweiskraft zugestehen, da die Differentialgleichungen für sich schon ohne Randbedingungen die vollständigen, jede Unbestimmtheit ausschließenden Naturgesetze enthalten. Um so mehr Gewicht besitzt eine andere Überlegung, die von der Frage ausgeht: Wie kommt es, daß unser Fixsternsystem, mit relativen Sternengeschwindigkeiten, die außerordentlich klein sind (gegen die Lichtgeschwindigkeit), besteht und sich erhält und nicht längst in die Unendlichkeit auseinander gestoben ist? Es gewährt dieses System durchaus den gleichen Anblick, wie ihn die Moleküle eines im Gleichgewicht befindlichen Gases einem Beobachter von entsprechend kleineren Dimensionen darbieten würden. Auch im Gas ruhen die einzelnen Moleküle nicht, aber unter den Geschwindigkeiten sind gemäß dem Maxwell'schen Verteilungsgesetz die kleinen ganz außerordentlich viel zahlreicher vertreten als die großen, und die Verteilung der Moleküle über das Gasvolumen ist eine im Mittel gleichmäßige, so daß beobachtbare grobe Dichteverschiedenheiten außerordentlich selten sind. Ist diese Analogie stichhaltig, so könnten wir den Zustand des Fixsternsystems und seines Gravitationsfeldes nach den gleichen *statistischen Prinzipien* verstehen, die uns lehren, daß ein abgeschlossenes Gas sich fast immer im Gleichgewichtszustand befindet. Das wäre aber nur dann möglich, wenn die *gleichmäßige Verteilung ruhender Sterne in einem statischen Gravitationsfeld* als idealer Gleichgewichtszustand mit den Gravitationsgesetzen verträglich ist. In einem statischen Gravitationsfeld ist die Weltlinie eines ruhenden Massenpunktes, d. h. eine Linie, auf welcher  $x_1, x_2, x_3$  konstant bleiben und nur  $x_0$  variiert, eine geodätische, wenn

$$\left\{ \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ i \end{smallmatrix} \right\} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

und daher

$$\left[ \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ i \end{smallmatrix} \right] = 0, \quad \frac{\partial g_{00}}{\partial x_i} = 0$$

ist. Eine ruhende Massenverteilung ist mithin nur dann möglich, wenn

$$\sqrt{g_{00}} = f = \text{konst.} = 1$$

ist. Die Gleichung

$$(27) \quad \frac{\Delta_2 f}{f} = \frac{1}{2} \mu_0 \quad (\mu_0 = \text{Massendichte})$$

zeigt dann aber, daß der ins Auge gefaßte ideale Gleichgewichtszustand mit den Gravitationsgesetzen, wie wir sie bisher angenommen haben, *unverträglich* ist.

Bei der Herleitung der Gravitationsgleichungen in § 28 haben wir aber eine kleine Unterlassungssünde begangen. Es ist nicht  $R$  die einzige von  $g_{ik}$ , ihren 1. und 2. Differentialquotienten abhängige und in den letzteren lineare Invariante, sondern die allgemeinste Invariante dieser Art hat die Gestalt  $\alpha R + \beta$ , wo  $\alpha$  und  $\beta$  numerische Konstante sind. Infolgedessen können wir die Gravitationsgesetze so verallgemeinern, daß

wir  $R$  (oder  $H$ ) durch  $R - \lambda$  (bzw.  $H - \lambda$ ) ersetzen, wo  $\lambda$  eine universelle Konstante bedeutet. Ist sie nicht  $= 0$ , wie wir bis anhin vorausgesetzt haben, sondern  $\neq 0$ , so können wir sie  $= 1$  nehmen; dadurch wird dann, nachdem durch das Relativitätsprinzip die Zeiteinheit, durch das Gravitationsgesetz die Masseneinheit auf die der Länge zurückgeführt war, auch noch die Längeneinheit in absoluter Weise festgelegt. Bei dieser Modifikation ergeben die Gravitationsgleichungen, wenn wir für die Komponenten  $T_{ik}$  die für ruhende Materie (im engeren Sinne) charakteristischen Werte verwenden, die Gleichung  $f = 1$  berücksichtigen und die Bezeichnungen aus § 29 benutzen,

$$(59) \quad \begin{aligned} \lambda &= \mu_0 \quad [\text{anstelle von (27)}] \text{ und} \\ P_{ik} + \lambda \gamma_{ik} &= 0. \end{aligned}$$

Jener ideale Gleichgewichtszustand ist unter diesen Umständen also möglich, wenn die Masse sich mit der Dichte  $\lambda$  verteilt. Der Raum muß dann metrisch homogen sein; und in der Tat sind die Gleichungen (59) erfüllt für einen sphärischen Raum vom Radius  $a = \sqrt{2/\lambda}$ . Wir können also im Raum vier an die Bedingung

$$(60) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2$$

geknapfte Koordinaten einführen, für die

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

wird. *Der Raum stellt sich als geschlossen und daher endlich heraus.* Wenn dieses nicht der Fall wäre, könnte man sich auch kaum vorstellen, wie ein statistisches Gleichgewicht zustande kommen sollte. Noch wäre zu fragen, ob die Punkte des Raumes den der Bedingung (60) genügenden Wertequadrupeln  $x_i$  umkehrbar-eindeutig entsprechen oder ob je zwei Wertsystemen

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad \text{und} \quad (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$$

derselbe Punkt entspricht. Diese beiden Möglichkeiten sind analysis-situ-mäßig verschieden, wenngleich beide Räume (im Gegensatz zum zweidimensionalen Fall) zweiseitig sind. Je nachdem die eine oder andere zutrifft, wäre die Gesamtmasse der Welt in gr:

$$\frac{\pi a}{2\kappa}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\pi a}{4\kappa}.$$

Die zentral-symmetrischen Lösungen der modifizierten homogenen Gravitationsgleichungen, die einer masseleeren Welt entsprechen würden, ergeben sich aus dem Variationsprinzip (Bezeichnungen siehe § 30):

$$\delta \int (2w\Delta' - \lambda\Delta r^2) dr = 0.$$

Die Variation von  $w$  ergibt wie früher  $\Delta = 1$ ; die Variation von  $\Delta$  hingegen

$$(61) \quad w' = -\frac{\lambda}{2} r^2.$$

Verlangen wir Regularität bei  $r = 0$ , so folgt daraus

$$(62) \quad w = -\frac{\lambda}{6} r^3, \quad \frac{1}{h^2} = f^2 = 1 - \frac{\lambda}{6} r^2.$$

Der Raum läßt sich kongruent auf eine »Sphäre«

$$(63) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 3a^2$$

vom Radius  $a\sqrt{3}$  im vierdimensionalen Euklidischen Raum abbilden (wobei unserm Zentrum einer der beiden Pole auf der Sphäre entspricht, deren erste drei Koordinaten  $x_1, x_2, x_3 = 0$  sind). Aber da  $f$  auf der »größten Kugel«  $x_4 = 0$ , welche man als Äquator oder Raumhorizont für jenes Zentrum bezeichnen könnte,  $= 0$  wird, daselbst die metrische Fundamentalförm der Welt also singular wird, so sieht man, daß die Möglichkeit einer leeren Welt den Naturgesetzen, die wir hier als gültig betrachten, widerstreitet. Zum mindesten am Horizont müssen sich Massen befinden. Die Rechnung läßt sich am einfachsten durchführen, wenn wir (lediglich zur Orientierung) dort eine inkompressible Flüssigkeit annehmen. Das zu lösende Variationsproblem lautet nach § 31 bei Verwendung der damaligen Bezeichnungen und unter Hinzufügung des  $\lambda$ -Gliedes

$$\delta \int \left\{ \mathcal{A}' w - \left( \mu_0 + \frac{\lambda}{2} \right) r^2 \mathcal{A} + r^2 v h \right\} dr = 0;$$

gegen früher ist also nur die Änderung eingetreten, daß die Konstante  $\mu_0$  durch  $\mu_0 + \frac{\lambda}{2}$  zu ersetzen ist. Wie dort folgt

$$(64) \quad w' + \left( \mu_0 + \frac{\lambda}{2} \right) r^2 = 0, \quad w = 2M - \frac{2\mu_0 + \lambda}{6} r^3, \quad \frac{1}{h^2} = 1 + \frac{2M}{r} - \frac{2\mu_0 + \lambda}{6} r^2.$$

Befindet sich die Flüssigkeit zwischen den beiden Breitenkugeln  $x_4 = \text{konst.}$ , welche den Radius  $r_0 (< a\sqrt{3})$  besitzen, so verlangt der stetige Anschluß an (62), daß die Konstante

$$M = \frac{\mu_0}{6} r_0^3$$

ist.  $\frac{1}{h^2}$  wird (in erster Ordnung) 0 für einen Wert  $r = a^*$  zwischen  $r_0$  und  $a\sqrt{3}$ . Der Raum läßt sich daher immer noch auf die Sphäre (63) abbilden, aber diese Abbildung ist in der von Flüssigkeit erfüllten Zone nicht mehr kongruent. Die Gleichung für  $\mathcal{A}$  (S. 211 oben) liefert jetzt ein  $f$ , das auf dem Äquator nicht verschwindet. Die Grenzbedingung verschwindenden Drucks ergibt eine transzendente Relation zwischen  $\mu_0$  und  $r_0$ .

Die allgemeine Lösung von (61) lautet

$$(65) \quad \frac{1}{h^2} = f^2 = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda}{6} r^2 \quad (m = \text{konst.}).$$

Sie entspricht dem Fall, daß um das Zentrum eine Massenkugel liegt. Nur in einer Zone  $r_0 \leq r \leq r_1$ , in welcher dieses  $f^2$  positiv ist, kann die Welt masseleer sein. Besteht sowohl die Massenkugel wie der erforderliche »Massenhorizont« aus inkompressibler Flüssigkeit von der Dichte  $\mu_0$  bzw.  $\mu_1$ , so haben wir für die erstere z. B.

$$(66) \quad h = \frac{b_0}{z}; \quad b_0^2 = \frac{6}{2\mu_0 + \lambda},$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + z^2 \equiv r^2 + z^2 = b_0^2.$$

Das Innere der Kugel kann daher kongruent auf die kleinere der beiden Kalotten abgebildet werden, in welche die Sphäre (66) durch die Breitenkugel vom Radius  $r_0$  zerfällt; während sich der »Massenhorizont«, der mehr als die Hälfte des Raumes einnimmt, kongruent auf die *größere* der beiden Kalotten abbilden läßt, in welche die Sphäre vom Radius  $b_1$  durch die Breitenkugel  $r = r_1$  zerlegt wird. Der stetige Anschluß an die im leeren Raume geltende Lösung (65) verlangt

$$m = \frac{\mu_0 r_0^3}{6} = \frac{\mu_1 r_1^3}{6}.$$

Für  $f$  ergibt die gleiche Überlegung wie auf S. 211 innerhalb der Massenkugel

$$(2\mu_0 + \lambda) \cdot f = \frac{3\mu_0}{h_0} + \frac{\lambda - \mu_0}{h}$$

und eine analoge Formel innerhalb des Massenhorizonts;  $f$  darf weder hier noch dort den Wert 0 annehmen. — So verhält es sich, wenn von den beiden oben erwogenen Analysis-situs-Möglichkeiten die erste zutrifft; im andern Falle besteht der Massenhorizont aus einer Zone (die beliebig schmal genommen werden kann).

Vielleicht sind wir, den eben angestellten Betrachtungen nachhängend, allzusehr den Lockungen einer sich ins Leere emporschwingenden Phantasie gefolgt. Doch helfen sie verdeutlichen, was alles auf Grund der neu gewonnenen Auffassungen über Raum und Zeit im Bereiche der *Möglichkeit* liegt. Wer auf den durchmessenen Weg zurückschaut und in einem einzigen Blick das Ganze umspannt, was nur sukzessive und in ein gegliedertes Mannigfaltige aufgelöst zur Darstellung kommen konnte, muß von dem Gefühl errungener *Freiheit* überwältigt werden, von dem mächtigen Eindruck einer entschränkenden Tat, durch welche das Denken einen engen festgefügtten Käfig sprengte, in den es bisher gebannt war; einer Tat, welche auf dem Felde der Naturerkenntnis wohl mit der des Kopernikus in eine Linie gestellt werden kann (wenn auch durchaus nicht von ihr eine so mächtige Wirkung auf die allgemeine Kultur zu erwarten ist).

Je weiter sich die Physik entwickelt, um so deutlicher wird es, daß die Beziehungen zwischen der Wirklichkeit, die jeder von uns lebt, und jenen objektiven Wesenheiten, von denen die Physik in mathematischen Symbolen handelt, durchaus nicht so einfach sind, wie es der naiven Auffassung erscheint, und daß von dem *Inhaltlichen* jener unmittelbar erfahrenen Wirklichkeit in die physikalische Welt im Grunde nichts eingeht. Immer klarer tritt zutage, daß die Physik eine Wissenschaft von genau dem gleichen Gepräge ist wie es die Geometrie war, die jetzt von ihr aufgesogen wird. Maxwellsche Theorie und analytische Geometrie sind sich in ihrer mathematischen Konstitution zum Verwechseln ähnlich. Die Physik, das stellt sich damit heraus, handelt gar nicht von dem Materiellen, Inhaltlichen der Wirklichkeit, sondern, was sie erkennt, ist lediglich deren *formale Verfassung*. Sie hat für die Wirklichkeit die gleiche Bedeutung wie die formale Logik für das Reich der Wahrheit. Was die formale Logik lehrt, gründet gewiß im Wesen der Wahrheit, und keine Wahrheit verletzt ihre Gesetze. Ob aber eine konkrete Behauptung wahr ist oder nicht, darüber lehrt sie schlechterdings nichts, das Inhaltliche der Wahrheit läßt sie gänzlich dahingestellt; der Grund der Wahrheit eines Urteils liegt in der beurteilten Sache und nicht in der Logik. Ich meine, daß die Physik es nur mit dem zu tun hat, was in einem genau analogen Sinne als formale Verfassung der Wirklichkeit zu bezeichnen wäre. Ihre Gesetze werden ebensowenig in der Wirklichkeit jemals verletzt, wie es Wahrheiten gibt, die mit der Logik nicht im Einklang sind; aber über das inhaltlich-Wesenhafte dieser Wirklichkeit machen sie nichts aus, der Grund der Wirklichkeit wird in ihnen nicht erfaßt. Wenn es der Wahn der scholastischen Methode ist, aus bloß Formalem Wesenhaftes deduzieren zu wollen, so ist die Weltanschauung, welche man als Materialismus bezeichnet, nur eine Spielart der Scholastik.

## Literatur.

### Einleitung und Kapitel I.

- 1) Die präzise Fassung dieser Gedanken lehnt sich aufs engste an Husserl an, »Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie« (Jahrbuch f. Philos. u. phänomenol. Forschung, Bd. 1, Halle 1913).
- 2) Eine eingehende Analyse dieses Problems, insbesondere der begrifflichen Schwierigkeiten, welche mit dem Kontinuum verbunden sind, enthält die vor kurzem erschienene Schrift des Verfassers »Das Kontinuum« (Leipzig 1918).
- 3) Helmholtz hat in der Arbeit »Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen« (Nachr. d. K. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen, math.-physik. Kl., 1868) den ersten Versuch gemacht, die Geometrie auf die Eigenschaften der Bewegungsgruppe zu stützen. Eine schärfere mathematische Fassung und Lösung fand dieses »Helmholtzsche Raumproblem« in den Arbeiten von S. Lie (Berichte d. K. Sächs. Ges. d. Wissenschaften zu Leipzig, math.-phys. Kl., 1890) mit Hilfe der von Lie geschaffenen Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen (man vgl. Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen Bd. 3, Abt. 5). Im Geiste der Mengenlehre sind die zugrunde liegenden Voraussetzungen dann von Hilbert weitgehend eingeschränkt worden (Grundlagen der Geometrie, 3. Aufl., Leipzig 1909, Anhang IV).
- 4) Für die systematische Behandlung der affinen Geometrie, unter Abstreifung der speziellen Dimensionszahl 3, ist wie für das Gesamtgebiet des geometrischen Kalküls Grassmanns »Lineale Ausdehnungslehre« (Leipzig 1844) das bahnbrechende Werk. In der Konzeption des Begriffs einer mehr als dreidimensionalen Mannigfaltigkeit sind Grassmann sowohl als Riemann durch die philosophischen Ideen Herbarts beeinflusst.
- 5) Hessenberg, Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie, Math. Ann. Bd. 78 (1917), S. 190.

### Kapitel II.

- 1) Zu genauerer Orientierung sei auf das in der Teubnerschen Sammlung »Wissenschaft und Hypothese« (Bd. IV) erschienene Buch von Bonola und Liebmann, »Die Nicht-Euklidische Geometrie«, verwiesen.
- 2) F. Klein, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Ann. Bd. 4 (1871), S. 573. Vgl. auch die fernerer Abhandlungen in Math. Ann. Bd. 6 (1873), S. 112 und Bd. 37 (1890), S. 544.
- 3) Sixth Memoir upon Quantics, Philosophical Transactions, t. 149 (1859).
- 4) Mathematische Werke (2. Aufl., Leipzig 1892), Nr. XIII, S. 272.
- 5) Saggio di interpretazione della geometria non euclidea, Giorn. di Matem. t. VI (1868), S. 204; Opere Matem. (Höpli 1902), t. I, S. 374.
- 6) Grundlagen der Geometrie (3. Aufl., Leipzig 1909), Anhang V.
- 7) Vgl. die Zitate Kap. I.<sup>3)</sup>. Christoffel, Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, Journ. f. d. reine und angew. Mathematik Bd. 70 (1869); Lipschitz, im gleichen Journal Bd. 70 (1869), S. 71, und Bd. 72 (1870), S. 1.
- 8) Christoffel, l. c.<sup>7)</sup>. Ricci und Levi-Civita, Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, Math. Ann. Bd. 54 (1901). Wesentliche Vereinfachungen bringen die schon unter dem Zeichen der Einsteinschen Gravitationstheorie erschienenen Arbeiten: Levi-Civita, Nozione di parallelismo in una varietà qualunque ..., Rend. del Circ. Matem. di Palermo, t. 42 (1917), und Hessenberg, Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie, Math. Ann. Bd. 78 (1917).
- 9) Ihn haben wir der zuletzt erwähnten Arbeit Levi-Civitas entnommen. Zu seiner Herleitung nimmt Levi-Civita an, daß der Riemannsche Raum in einen höherdimensionalen Euklidischen eingebettet ist. Demgegenüber dürfte unsere Begründung, die auf dem Begriff des geodätischen Koordinatensystems beruht, den Vorzug verdienen.

10) Dieser Beweis der Symmetrieeigenschaften der Riemannschen Krümmung rührt von Hesse (l. c.) her, nachdem er früher immer auf rechnerischem Wege erbracht war.

11) Vgl. z. B. Levi-Civita, Rend. di Palermo l. c.<sup>8)</sup>, §§ 17, 18.

### Kapitel III.

1) Wegen der Literatur zu der »speziellen Relativitätstheorie«, um die es sich in diesem Kapitel handelt, verweisen wir ein für allemal auf das Buch von Laue, Das Relativitätsprinzip (2. Aufl., Braunschweig 1913).

2) Helmholtz, Monatsber. d. Berliner Akademie, März 1876, oder Ges. Abhandlungen Bd. I (1882), S. 791. Eichenwald, Annalen der Physik Bd. 11 (1903), S. 1.

3) Das gilt nicht ganz ohne Einschränkung; siehe A. Korn, Mechanische Theorie des elektromagnetischen Feldes, eine Reihe von Abhandlungen in der Physikalischen Zeitschrift, Bd. 18 u. 19 (1917/18).

4) A. A. Michelson, Sill. Journ. Bd. 22 (1881), S. 120. A. A. Michelson und E. W. Morley, ebenda Bd. 34 (1887), S. 333. E. W. Morley und D. C. Miller, Philosophical Magazine Bd. 8 (1904), S. 753 und Bd. 9 (1905), S. 680. H. A. Lorentz, Arch. Néerl. Bd. 21 (1887), S. 103 oder Ges. Abhandl. Bd. I, S. 341. Seit Aufstellung der Relativitätstheorie durch Einstein ist das Experiment vielfach diskutiert worden.

5) Vgl. z. B. Trouton und Noble, Proc. Roy. Soc. Bd. 72 (1903), S. 132. Lord Rayleigh, Philos. Mag. Bd. 4 (1902), S. 678; D. B. Brace, ebenda Bd. 7 (1904), S. 317, Bd. 10 (1905), S. 71 u. 591; B. Strasser, Annal. d. Physik Bd. 24 (1907), S. 137. Des Coudres, Wiedemanns Annalen Bd. 38 (1889), S. 71. Trouton und Rankine, Proc. Roy. Soc. Bd. 8 (1908), S. 420.

6) Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annal. d. Physik Bd. 17 (1905), S. 891.

7) Die mathematische Durchbildung der Relativitätstheorie, namentlich ihre Auffassung als Weltgeometrie, verdankt man erst H. Minkowski. Siehe dessen Abhandlung »Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern«, Nachr. d. K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, 1908, S. 53, oder Ges. Abhandl. Bd. II, S. 352.

8) Möbius, Der baryzentrische Calcul (Leipzig 1827; oder Werke, Bd. I), Kap. 6 u. 7.

9) Wilson, Philosoph. Transact. (A) Bd. 204 (1904), S. 121.

10) Röntgen, Sitzungsber. d. Berliner Akademie 1885, S. 195; Wied. Annalen Bd. 35 (1888), S. 264, und Bd. 40 (1890), S. 93. Eichenwald, Annalen d. Physik Bd. 11 (1903), S. 421.

11) Minkowski l. c.<sup>7)</sup>.

12) W. Kaufmann, Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen 1902, S. 291; Ann. d. Physik Bd. 19 (1906), S. 487, u. Bd. 20 (1906), S. 639. A. H. Bucherer, Ann. d. Physik Bd. 18 (1909), S. 513, u. Bd. 29 (1909), S. 1063. S. Ratnowsky, Determination experimentale de la variation d'inertie des corpuscules cathodiques en fonction de la vitesse, Dissertation, Genf 1911. E. Hupka, Ann. d. Physik Bd. 31 (1910), S. 169.

13) Das Relativitätsprinzip (2. Aufl., 1913), S. 208.

14) Einstein l. c.<sup>6)</sup>. Planck, Bemerkungen zum Prinzip der Aktion und Reaktion in der allgemeinen Dynamik, Physik. Zeitschr. Bd. 9 (1908), S. 828; Zur Dynamik bewegter Systeme, Ann. d. Physik Bd. 26 (1908), S. 1.

15) Herglotz, Ann. d. Physik Bd. 36 (1911), S. 453.

16) Ann. d. Physik, Bd. 37, 39, 40 (1912/13).

### Kapitel IV.

1) Vgl. für diesen Paragraphen wie für das ganze Kapitel A. Einstein, Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie (Leipzig, Joh. Ambr. Barth, 1916); Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie (gemeinverständlich; Sammlung Vieweg, 2. Aufl. 1917). E. Freundlich, Die Grundlagen der Einsteinschen

Gravitationstheorie (Springer 1916). M. Schlick, Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik (Springer 1917). E. Kretschmann, Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate, Ann. Phys. Bd. 53 (1917), S. 575.

2) Schon Newton empfand die Schwierigkeit; am nachdrücklichsten ist sie, von E. Mach ausgesprochen worden. Vgl. die eingehenden Literaturangaben bei A. Voss, Die Prinzipien der rationellen Mechanik, in der Mathematischen Enzyklopädie, Bd. IV Art. 1, Absatz 13—17 (phoronomische Grundbegriffe).

3) Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn VIII (1890).

4) Über andere Versuche (Abraham, Mie, Nordström), die Theorie der Gravitation der durch die spezielle Relativitätstheorie geschaffenen Lage anzupassen, orientiert übersichtlich M. Abraham, Neuere Gravitationstheorien, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, Bd. XI (1915), S. 470.

5) Die Grundlagen der Physik (1. Mitteilung), Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen 1915. Hier ist auch der Zusammenhang zwischen Hamiltonscher Funktion und Energie-Impuls-Tensor aufgestellt und wurden, etwa gleichzeitig mit Einstein, wenn auch nur im Rahmen der Mieschen Theorie, die Gravitationsgleichungen ausgesprochen.

6) Weyl, Annal. d. Physik. Bd. 54 (1917), S. 117 (§ 2). Siehe ferner vier Mitteilungen von H. A. Lorentz, Über die Einsteinsche Gravitationstheorie, in den Versl. K. Akad. van Wetensch. 1915/16. Klein, Zu Hilberts erster Note über die Grundlagen der Physik, Gött. Nachr., Sitzung v. 25. Jan. 1918.

7) Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissenschaften 1915, 44, S. 778, mit Nachtrag auf S. 799.

8) Eine andere Herleitung des Energieprinzips bei Einstein, Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1916, 42, S. 1111.

9) Hilbert, Die Grundlagen der Physik, 1. und 2. Mitteilung (Nachr. d. K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1915 u. 1917).

10) Nach Levi-Civita, Statica Einsteiniana, Rend. della R. Accad. dei Lincei 1917, vol. XXVI, ser. 5<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem., pag. 458.

11) Die näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation, wie sie der Beschränkung auf die linearen Glieder entspricht, ist allgemein, auch für nicht-statische Felder, von Einstein durchgeführt worden in Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1916, S. 688. Dazu die Ergänzung: Über Gravitationswellen, ebenda 1918, S. 154. Die Integration geschieht durch retardierte Potentiale (Ausbreitung der Gravitation mit Lichtgeschwindigkeit). Ein interessante Anwendung gibt H. Thirring, Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie, Physik. Zeitschrift Bd. 19 (1918), S. 33.

12) Einstein, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1915, 47, S. 831.

13) Schwarzschild, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1916, 7, S. 189.

14) Am meisten Beachtung fand die Hypothese von H. Seeliger, Das Zodiakallicht und die empirischen Glieder in der Bewegung der inneren Planeten, Münch. Akad. Ber. 36 (1906). Vgl. dazu E. Freundlich, Astr. Nachr. Bd. 201 (Juni 1915), S. 49.

15) Vgl. Schwarzschild l. c.<sup>13</sup>); Hilbert l. c.<sup>9</sup>), 2. Mitt.; J. Droste, Versl. K. Akad. van Wetensch. Bd. 25 (1916), S. 163.

16) Vom  $n$ -Körper-Problem handelt J. Droste, Versl. K. Akad. van Wetensch. Bd. 25 (1916), S. 460.

17) L. Flamm, Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie, Physik. Zeitschr. Bd. 17 (1916), S. 449.

18) Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1916, 18, S. 424.

19) Weyl l. c.<sup>6</sup>), §§ 5, 6.

20) Desgl., § 1.

21) Hilbert l. c.<sup>9</sup>), 2. Mitt.

22) Einstein, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1917, 6, S. 142. Siehe auch de Sitter, Amsterdam Proc. Bd. 19 (1917), S. 527.

## Sachregister.

(Die Zahlen verweisen, wenn nichts anderes bemerkt ist, auf die Seiten des Buchs.)

- Abbildung, affine 19.  
 —, kongruente 10, 25.  
 Aberration 124, 147.  
 Addition von Vektoren 15.  
 — von Tensoren 35.  
 Äther 124, 183.  
 affine Geometrie § 2.  
 aktive Vergangenheit und Zukunft 137, 182.  
 Analysis situs 219.  
 assoziatives Gesetz 15.  
 asymptotische Gerade 69.  
 aufspannen 17, 18.  
 Axiome der affinen Geometrie 15.  
 — der metrischen G. 25.  
 — der Riemannschen G. 84.  
 Betrag eines Tensors 42.  
 Bilinearform 23.  
 Biot-Savartsches Gesetz 65.  
 Bolyai-Lobatschewskysche Geometrie § 10.  
 Cartesisches Koordinatensystem 26.  
 Christoffelsche Dreiindizes-Symbole 98.  
 Corioliskraft 177.  
 Coulombsches Gesetz 58.  
 definit 24.  
 Dielektrizitätskonstante 64.  
 Differential, Cauchysches 95.  
 Differentiation von Tensoren 53, 96, 103.  
 Dimension 17, 75.  
 —, positive und negative, einer quadratischen Form 27.  
 Divergenz (div) 54.  
 Dopplersches Prinzip 146.  
 Drehgeschwindigkeit 38.  
 Drehimpuls 38.  
 Drehmoment einer Kraft 38.  
 Dreiindizes-Symbole 98.  
 Druck, elastischer 57.  
 —, elektrischer 167.  
 Ebene 12, 14, 16, 18.  
 Eigenzeit 138, 141.  
 einseitige Fläche 220.  
 Einsteinsches Gravitationsgesetz 190.  
 — Relativitätsprinzip, das spezielle § 20.  
 —, das allgemeine § 26.  
 elektrischer Druck 167.  
 —s Feld 129.  
 — Feldstärke 58.  
 — Impuls 167.  
 — Strom 66, 129.  
 — Verschiebung 64.  
 elektromagnetische Grundgesetze § 19,  
 § 22, § 25.  
 —s Potential 129.  
 elektromotorische Kraft 68.  
 Elektron 60, 65, 68, 158, 160, 171.  
 elektrostatische Grundgesetze 62.  
 —s Potential 58.  
 Energie als Ursache der Trägheit 161.  
 — wirkt gravitierend 192.  
 Energiedichte im elektrostatischen Feld 63.  
 — im Magnetfeld 66.  
 — im elektromagnetischen Wechselfeld 127.  
 Energie-Impuls-Tensor 131, 184.  
 —, kinetischer und potentieller 159.  
 Energiestrom 127.  
 Eötvöschers Versuch 180.  
 Erhaltungssatz der Elektrizität 125, 129.  
 — von Energie und Impuls 131, 186.  
 Euklidischer Raum Kap. I.  
 Faradaysches Induktionsgesetz 125.  
 Feld, elektromagnetisches, stationäres § 9,  
 S. 106.  
 — —, veränderliches § 19.  
 — der Gravitation 181.  
 —, metrisches 175.  
 —, skalares, Vektor- und Tensorfeld 52, 93.  
 Feldenergie 127.  
 Feldimpuls 131.  
 Feldstärke, elektrische 58.  
 —, magnetische 66.  
 Feldtensor, elektromagnetischer 129.  
 Fermatsches Prinzip 196.  
 Fläche 76.  
 Flächentensor 47.  
 Flüssigkeitskugel, gravitierende, im Gleichgewicht 209, 226.  
 Form, bilineare 23.  
 —, lineare 20.  
 —, quadratische 23.  
 Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation 137.

- Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes 123, 145.  
 Fresnelscher Mitführungskoeffizient 146.  
 früher und später 6.  
 Fundamentalform, metrische 25, 78, 93.
- Galileisches Relativitätsprinzip** § 18.  
 — Trägheitsprinzip 117, 140, 176.  
 — Weltgeometrie 120.  
 Gaußsche Koordinaten 77.  
 geodätisches Koordinatensystem 97.  
 — Linie 102, § 17.  
 — Nulllinie 182.  
 — Vektorfeld 99, 102.  
 Geometrie, affine § 2.  
 —, Euklidische Kap. I.  
 —, Einstein-Minkowskische Welt- 135.  
 —, Galileische Welt- 120.  
 —, metrische § 4.  
 —,  $n$ -dimensionale 21.  
 —, Nicht-Euklidische § 10.  
 —, Riemannsche §§ 11, 12.  
 Gerade 11, 14, 16, 18.  
 Gleichheit von Zeitstrecken 6.  
 — von Raumstücken 10, 88.  
 gleichzeitig 114, 136.  
 Gradient 53, 94.  
 Gravitation, eine Eigenschaft der Energie 192.  
 Gravitationsfeld 181.  
 Gravitationsgesetz, Einsteinsches 190.  
 —, Newtonsches 188.  
 Gravitationskonstante 188, 195.  
 Gravitationsradius einer Ladung 207.  
 — einer Masse 202.  
 gravitierende Flüssigkeitskugel 208.  
 Grenzbedingungen in der Elektrodynamik 155.  
 Gruppe 8, 14.
- Hamiltonsche Funktion** 168, 184, 190.  
 —s Prinzip 169, 190.  
 — der Maxwell-Lorentzschen Theorie unter Berücksichtigung der Gravitation 217.  
 Hertzsche Elektrodynamik bewegter Körper 151.  
 Homogenität des Raumes 5.  
 — der Welt 119.  
 — der Zeit 7.  
 homogene lineare Gleichungen 31.  
 homologe Punkte 10.
- immanentes Objekt 4.  
 Impuls 36.
- Impuls, elektrischer 167.  
 Impulsdichte im elektromagnetischen Feld 131.  
 Impulsmoment 38.  
 Impulsstrom 131.  
 Induktionsgesetz 125.  
 inhomogene lineare Gleichungen 21.  
 intentionales Objekt 3.  
 Invariante 35.  
 Joulesche Wärme 126.
- Kathodenstrahlen** 158.  
 Kausalität 6.  
 —sprinzip 166, 220.  
 kinetischer Energie-Impuls-Tensor 159.  
 kommutatives Gesetz 15.  
 Komponenten einer Verschiebung 18, 92.  
 — eines Tensors 31, 92.  
 —, kovariante und kontravariante 32.  
 Kongruenz 10, 25.  
 kontravariant 32.  
 Konvektionsstrom 124, 154.  
 Koordinaten 18, 76.  
 —, Cartesische 26.  
 —, geodätische 97.  
 —, Gaußsche 77.  
 Koordinatensystem 8, 18.  
 Köpplung der Kräfte und Verschiebungen 33.  
 kovariant 32.  
 Kreiselgleichungen 42.  
 Krümmung der Lichtstrahlen im Gravitationsfeld 196.  
 — von Kurven und Flächen 85.  
 — des Raumes § 16.  
 Krümmungsinvariante 110.  
 Krümmungstensor 108.  
 —, verjüngter 110.  
 Kurve 76, 93.
- Leitungsstrom** 154.  
 Lichtäther 124.  
 Lichtstrahl 144, 195.  
 Linearform 20.  
 lineares Punktgebilde 18.  
 linear unabhängige Vektoren 17.  
 — — Tensoren, Anzahl der 49.  
 lineare Vektor-Mannigfaltigkeit 17.  
 Linientensor 47.  
 Lobatschefskysche Geometrie § 10.  
 Lorentz-Kontraktion 134, 139, 144.  
 — -Transformation 128.
- Magnetinduktion** 67.  
 magnetische Feldstärke 66.

- Magnetisierung 67.  
 magnetische Permeabilität 68.  
 Mannigfaltigkeit, lineare Vektor- 17.  
 —,  $n$ -dimensionale 75.  
 Masse; schwere und träge — sind gleich 180.  
 —, träge 161.  
 Maxwellsche Theorie §§ 9, 19.  
 Merkur 181, 198.  
 Messen 7, 60, 79, 182.  
 metrisches Axiom 25.  
 — Feld 175.  
 — Fundamentalform 25, 78, 93.  
 Michelsonscher Versuch 133.  
 Miesche Theorie § 25.  
 Mitführungskoeffizient 146.  
 Multiplikation eines Vektors und eines Tensors mit einer Zahl 15, 35.  
 — von Tensoren 36.  
  
 Newtonsches Gravitationsgesetz 188.  
 nicht-ausgeartete quadratische Form 23.  
 Nicht-Euklidische Geometrie § 10.  
 Nulllinien, geodätische 182.  
  
 Objekt, immanentes 4.  
 —, intentionales 3.  
 —, transzendentes 4.  
 Ohmsches Gesetz 68.  
  
 parallel 12, 18, 101.  
 Parallelepipet 18.  
 Parallelogramm 18.  
 Parallelverschiebung eines Vektors 101.  
 Parameterdarstellung von Kurven und Flächen 76.  
 passive Vergangenheit und Zukunft 137, 182.  
 Perihelvorgang des Merkur 181, 198, 205.  
 Permeabilität 68.  
 Phase 144.  
 Planetenbewegung 202.  
 Polarisation, elektrische 63.  
 positiv-definit 24.  
 Potential, elektromagnetisches 129.  
 —, elektrostatisches 58.  
 —, Gravitations- 182.  
 —, retardiertes 128.  
 —, Vektor- 66.  
 Produkt eines Vektors und eines Tensors mit einer Zahl 15, 35.  
 —, skalares 24.  
 —, vektoriell 37.  
 — von Tensoren 36.  
 Projektion 120.  
 Pythagoreische Lehrsatz 25, 82, 182.  
  
 Quadratische Form 23.  
  
 Randbedingungen in der Gravitationstheorie 215, 222.  
 Rang eines Tensors 31.  
 Raum, als Form der Anschauung 3.  
 — als Projektion der Welt 122, 141.  
 —, Euklidischer Kap. I.  
 —,  $n$ -dimensionaler 21.  
 —, Riemannscher §§ 11, 12.  
 raumartiger Weltvektor 141, 182.  
 Raumkrümmung § 16.  
 Raumpunkt 10, 122.  
 Raumtensor 50.  
 Raum-Zeit-Punkt 114.  
 Relativität der Bewegung 116, 173.  
 Relativitätsprinzip, Einsteinsches, allgemeines § 26.  
 —, spezielles § 20.  
 —, Galileisches § 18.  
 Relativgeschwindigkeit 142.  
 Repräsentation eines Raumtensors durch einen Welttensor 150.  
 retardiertes Potential 128.  
 Riemannsche Geometrie §§ 11, 12.  
 Rotation (rot) 54.  
 Ruhlänge 138.  
 Ruhvolumen 144.  
  
 Scheinkraft des metrischen Feldes 177.  
 schief-symmetrisch 32.  
 schwere Masse 180.  
 senkrecht 12, 26.  
 Skalar 35.  
 skalares Produkt 24.  
 Spaltung der Tensoren 149.  
 — der Welt in Raum und Zeit 122, 141.  
 später 6.  
 Spannung 56.  
 —, Maxwellsche 61, 66, 130.  
 spezielles Relativitätsprinzip § 20.  
 Strecke 18.  
 Strom, elektrischer 66.  
 Stufe eines Tensors 31.  
 Subjektivität der Sinnesqualitäten 3.  
 Substanz 1, 217.  
 Summe von Vektoren und Tensoren 15, 35.  
 symmetrische Bilinearform 24.  
  
 Tensor 31, 45, 92.  
 —, Energie-Impuls-Tensor 131, 184.  
 Tensorfeld 52, 93.  
 Tensorkomponenten 31, 45, 92.  
 träge Masse 161.  
 Trägheit der Energie 161.

Trägheitsgesetz 27.  
 Trägheitsindex 27.  
 Trägheitsmoment 40.  
 Trägheitsprinzip 117, 140, 176.  
 Traktrix 83.  
 Translation 13.  
 transzendentes Objekt 4.

Uhr 7.

Vektoren 14.  
 —, linear-unabhängige 17, 92.  
 —, Welt- 120.  
 Vektorfeld 52, 93.  
 —, geodätisches 99, 102.  
 vektoriell Produkt 37.  
 Vektormannigfaltigkeit 17.  
 Vektorpotential 66.  
 Vergangenheit, aktive und passive 137, 182.  
 Verjüngung 40.  
 Verschiebung 14.  
 —, elektrische 64.  
 —, infinitesimale 92.  
 —, Parallel-, eines Vektors 101  
 Verschiebungsstrom 126.

Verzerrungstensor 54.  
 Viererpotential 129.  
 Viererstrom 129.

Weltgeometrie, Galileische 120.  
 —, Einstein-Minkowskische 135.  
 Weltpunkt 114.  
 Weltvektor 120.  
 —, raumartiger und zeitartiger 141, 182.  
 Wilsonscher Versuch 152.  
 Winkel 12, 26.  
 Wirklichkeit 4, 227.  
 Wirkungsgröße 168, 184, 190.  
 Wirkungsprinzip 169, 190.

Zahl 7.  
 Zeit 5, 6, 136.  
 zeitartiger Weltvektor 141, 182.  
 Zeitpunkt 6.  
 Zeitstrecke 6.  
 Zentrifugalkraft 119, 175, 178.  
 Zukunft, aktive und passive 137, 182.  
 zweiseitige Fläche 220.  
 zwischen 11.